פתרון תרגיל

נקודות קיצון עם פרמטרים –
פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 59, ת. 12

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות וקבע את סוגן במקרים הבאים:

א) $a > 0$. **ב)** $a < 0$.

12) $$y = x + \frac{4a^2}{x}$$

הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות וקבע את סוגן במקרים הבאים:

א) $a > 0$. ב) $a < 0$.

12) $y = x + \frac{4a^2}{x}$

פתרון

תחום הגדרה: $x \neq 0$

נדרוש: $y'(x) = 0$

$$y'(x) = 1 - \frac{4a^2}{x^2} = \frac{x^2 - 4a^2}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 4a^2$$

$$x = \pm 2a$$

הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות וקבע את סוגן במקרים הבאים:

12) $y = x + \frac{4a^2}{x}$

א) $a > 0$. **ב)** $a < 0$.

פתרון

נדרוש: $y'(x) = 0$

$x = \pm 2a$

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות **סימן** הנגזרת השנייה

אם הנגזרת הראשונה של פונקציה היא שבר בעל מכנה חיובי לכל x (פרט אולי לנקודות בודדות שבהן המכנה מתאפס) אז סימן הנגזרת השנייה של נקודת קיצון הוא כסימן נגזרת המונה של הנגזרת הראשונה.

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הביטוי:

$(x^2 - 4a^2)' = 2x$

12) $y = x + \frac{4a^2}{x}$ הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות וקבע את סוגן במקרים הבאים:

א) $a > 0$. ב) $a < 0$.

פתרון

א) $a > 0$

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הביטוי: $(x^2 - 4a^2)' = 2x$

$x = 2a$ $\qquad 2 \cdot 2a = 4a > 0$

עבור $x = 2a$ לפונקציה נקודת מינימום

$$y(2a) = 2a + \frac{4a^2}{2a} = 4a$$

$(2a,4a)$ נקודת מינימום

12) $y = x + \frac{4a^2}{x}$ הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות וקבע את סוגן במקרים הבאים:

א) $a > 0$. ב) $a < 0$.

פתרון

א) $a > 0$

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הביטוי: $(x^2 - 4a^2)' = 2x$

$x = -2a$ $2 \cdot (-2a) = -4a < 0$

עבור $x = -2a$ לפונקציה נקודת מקסימום

$$y(-2a) = -2a + \frac{4a^2}{-2a} = -4a$$

נקודת מקסימום $(-2a, -4a)$

12) הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות וקבע את סוגן במקרים הבאים: $y = x + \frac{4a^2}{x}$

א) $a > 0$. ב) $a < 0$.

פתרון

ב) $a < 0$

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הביטוי: $(x^2 - 4a^2)' = 2x$

$x = 2a$ $\quad$ $2 \cdot 2a = 4a < 0$

עבור $x = 2a$ לפונקציה נקודת מקסימום

$$y(2a) = 2a + \frac{4a^2}{2a} = 4a$$

$(2a,4a)$ נקודת מקסימום

הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות וקבע את סוגן במקרים הבאים:

א) $a > 0$.   ב) $a < 0$.

12) $y = x + \frac{4a^2}{x}$

פתרון

ב) $a < 0$

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הביטוי: $(x^2 - 4a^2)' = 2x$

$x = -2a$ $2 \cdot (-2a) = -4a > 0$

עבור $x = -2a$ לפונקציה נקודת מינימום

$$y(-2a) = -2a + \frac{4a^2}{-2a} = -4a$$

נקודת מינימום $(-2a, -4a)$

בהצלחה