פתרון תרגיל

נקודות קיצון עם פרמטרים – פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 59, ת. 9

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

9) לפונקציה $y=\frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

לפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

תחום הגדרה: $x^2 + 3 \neq 0$ **הפונקציה מוגדרת לכל x**

עבור שיעור ה- x של נקודת הקיצון מתקיים:

$$y'(x) = 0 \qquad y(x) = -\frac{1}{2}$$

נקבל מערכת של שתי משוואות שתלויות בשני נעלמים –
שיעור ה- x של נקודת הקיצון ו- a

לפונקציה $y=\frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

$$\boldsymbol{y'(x)=0}$$

$$y'(x)=\left(\frac{x+a}{x^2+3}\right)'=\frac{1(x^2+3)-(x+a)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{x^2+3-2x^2-2ax}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2-2ax+3}{(x^2+3)^2}=0$$

$$\boldsymbol{-x^2-2ax+3=0}$$

לפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.
מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

$$\boldsymbol{y(x) = -\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x+a}{x^2+3} = -\frac{1}{2}$$

$$2x + 2a = -x^2 - 3$$

$$\boldsymbol{x^2 + 2x + 2a + 3 = 0}$$

לפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

$$\begin{cases} -x^2 - 2ax + 3 = 0 \\ x^2 + 2x + 2a + 3 = 0 \end{cases}$$

נחבר בין המשוואות:

$$-2ax + 2x + 2a + 6 = 0$$

$$x - ax + a + 3 = 0$$

$$x(1 - a) + a + 3 = 0$$

לפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

$$x(1-a)+a+3=0 \qquad /\div(1-a)\neq 0$$

$$x=\frac{-(a+3)}{(1-a)}=\frac{a+3}{a-1}$$

נציב את הביטוי שהתקבל במשוואה השנייה:

$$\left(\frac{a+3}{a-1}\right)^2+2\cdot\left(\frac{a+3}{a-1}\right)+2a+3=0$$

לפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

$$\left(\frac{a+3}{a-1}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{a+3}{a-1}\right) + 2a + 3 = 0 \qquad /\cdot (a-1)^2$$

$$(\underline{a+3})^2 + 2(\underline{a+3})(\underline{a-1}) + (2a+3)(\underline{a-1})^2 = 0$$

$$\underbrace{(a+3)^2 + (a+3)(a-1)} + \underbrace{(a+3)(a-1) + (2a+3)(a-1)^2} = 0$$

לפונקציה $y=\frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

$$\underbrace{(a+3)^2+(a+3)(a-1)}+\underbrace{(a+3)(a-1)+(2a+3)(a-1)^2}=0$$

$$(a+3)[(a+3)+(a-1)]+(a-1)[(a+3)+(2a+3)(a-1)]=0$$

$$(a+3)(2a+2)+(a-1)(a+3+2a^2+a-3)=0$$

$$2(a+3)(a+1)+(a-1)(2a^2+2a)=0$$

לפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

$$2(a+3)(a+1) + (a-1)(2a^2+2a) = 0$$

$$2(a+3)\underline{(a+1)} + 2a(a-1)\underline{(a+1)} = 0$$

$$2(a+1)[(a+3) + a(a-1)] = 0$$

$$2(a+1)(a^2+3) = 0$$

לפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

$$2(a+1)\underbrace{(a^2+3)}_{}=0$$

הביטוי חיובי לכל a

$$\boldsymbol{a=-1}$$

נמצא נקודת קיצון לפונקציה

$$y(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$$

לפונקציה $y=\frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.
מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

נמצא נקודת קיצון לפונקציה $y(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$

נדרוש: $f'(x)=0$

$$y'(x)=\frac{-x^2-2ax+3}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}=0$$

$$-x^2+2x+3=0$$

לפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.
מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -1$$

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות **סימן** הנגזרת השנייה

אם הנגזרת הראשונה של פונקציה היא שבר בעל מכנה חיובי לכל x (פרט אולי לנקודות בודדות שבהן המכנה מתאפס) אז סימן הנגזרת השנייה של נקודת קיצון הוא כסימן נגזרת המונה של הנגזרת הראשונה.

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע״י הביטוי: $(-x^2 + 2x + 3)' = -2x + 2$

לפונקציה $y = \frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הביטוי: $(-x^2+2x+3)' = -2x+2$

$x=-1$ $\quad -2\cdot(-1)+2 = 4 > 0$

עבור $x=-1$ לפונקציה נקודת מינימום

$$y(-1) = \frac{-1-1}{(-1)^2+3} = -\frac{1}{2}$$

נקודת מינימום $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

לפונקציה $y=\frac{x+a}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ששיעור ה-y שלה הוא $-\frac{1}{2}$.

מצא את a ואת נקודות הקיצון של הפונקציה. (היעזר בפירוק לגורמים).

פתרון

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הביטוי: $(-x^2+2x+3)'=-2x+2$

$x=3$ $\qquad$ $-2\cdot 3+2=-4<0$

עבור $x=3$ לפונקציה נקודת מקסימום

$$y(3)=\frac{3-1}{3^2+3}=\frac{1}{6}$$

$\left(3,\frac{1}{6}\right)$ נקודת מקסימום

בהצלחה