פתרון תרגיל

מקומות גיאומטריים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 204, ת. 14

המצגת נערכה ע"י **שירי דוברין**

השאלה

14) מרכז המעגל $(x-2)^2+y^2=16$ הוא בנקודה M והמעגל חותך את ציר ה-x בנקודה A שנמצאת משמאל לציר ה-y. CD הוא מיתר במעגל, המקביל לציר ה-x, כך ש-C נמצאת משמאל ל-D. הנקודה E היא אמצע המיתר CD.

א. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי עליו מונח מפגש הישרים AE ו-CM.

ב. נסמן ב-B את נקודת החיתוך של המעגל הנ"ל והמקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' שנמצאת ברביע הראשון. מצא את הזוית החדה שבין המשיק למעגל בנקודה B לבין המשיק למקום הגיאומטרי הנ"ל בנקודה B.

מרכז המעגל $(x-2)^2+y^2=16$ הוא בנקודה M והמעגל חותך את ציר ה-x בנקודה A שנמצאת משמאל לציר ה-y.
CD הוא מיתר במעגל, המקביל לציר ה-x, כך ש-C נמצאת משמאל ל-D. הנקודה E היא אמצע המיתר CD.

פתרון

נשרטט את מערך הנתונים :

מרכז המעגל הנתון : $M(2,0)$

מרכז המעגל $(x-2)^2+y^2 = 16$ הוא בנקודה M והמעגל חותך את ציר ה-x בנקודה A שנמצאת משמאל לציר ה-y.
CD הוא מיתר במעגל, המקביל לציר ה-x, כך ש-C נמצאת משמאל ל-D. הנקודה E היא אמצע המיתר CD.

פתרון

חיתוך המעגל הנתון עם ציר x , נדרוש $y = 0$:

$$(x-2)^2 = 16$$

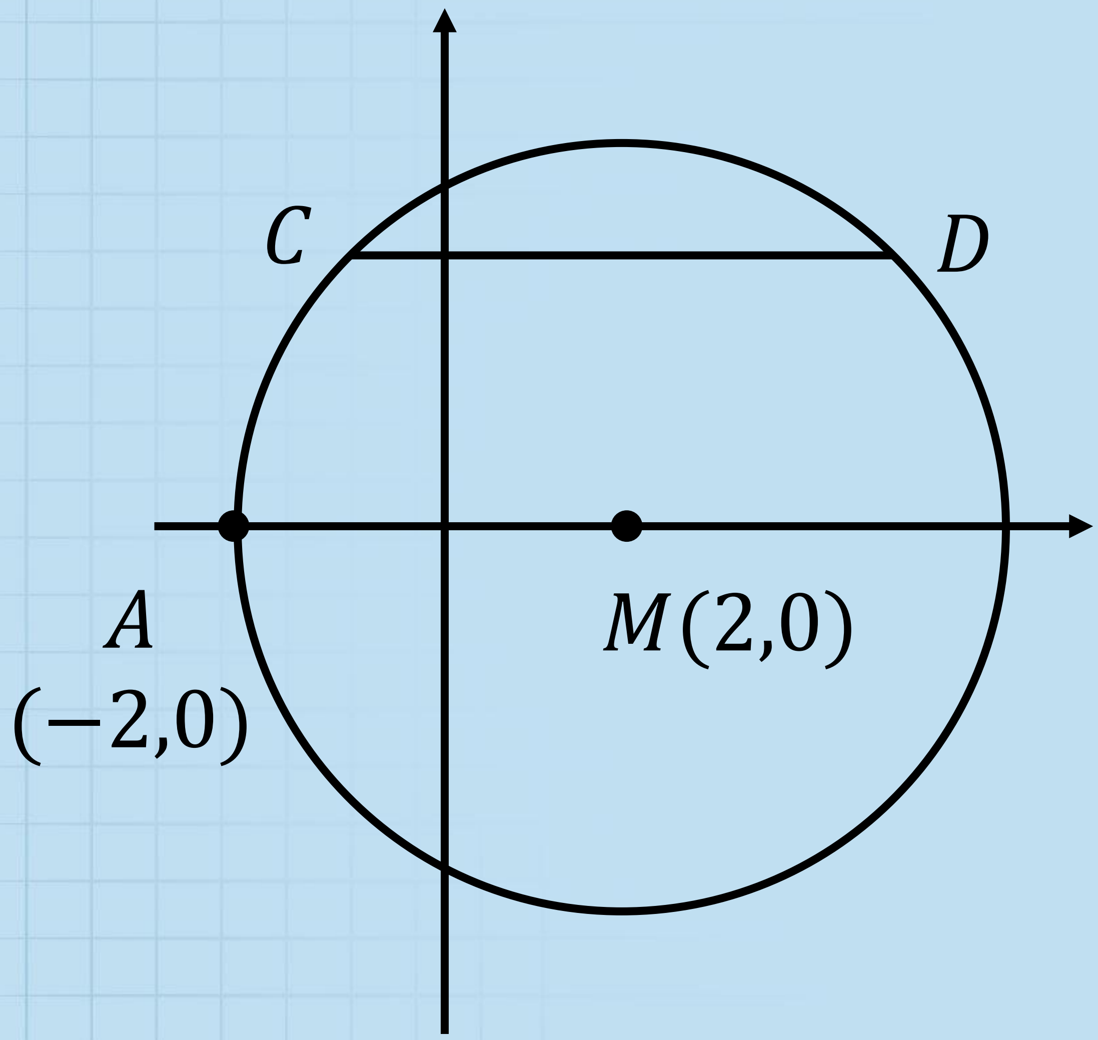
$$x - 2 = -4 \qquad x - 2 = 4$$

$$x = -2 \qquad x = 6$$

הנקודה A משמאל לציר y: $\boldsymbol{A(-2,0)}$

מרכז המעגל $(x-2)^2+y^2 = 16$ הוא בנקודה M והמעגל חותך את ציר ה-x בנקודה A שנמצאת משמאל לציר ה-y.
CD הוא מיתר במעגל, המקביל לציר ה-x, כך ש-C נמצאת משמאל ל-D. הנקודה E היא אמצע המיתר CD.

פתרון



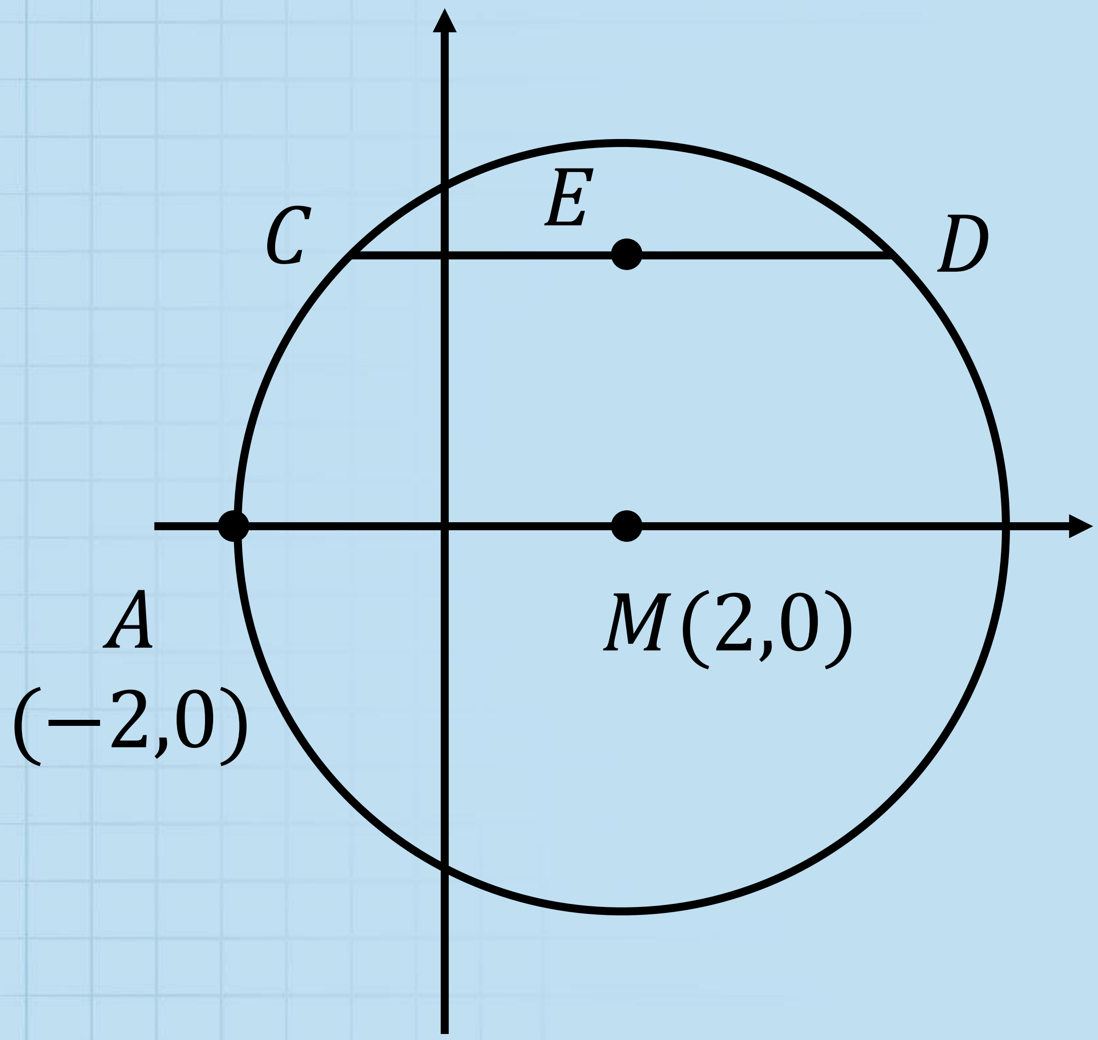
$$CD \parallel x$$

$$\Downarrow$$

$$y_C = y_D$$

מרכז המעגל $(x-2)^2+y^2=16$ הוא בנקודה M והמעגל חותך את ציר ה-x בנקודה A שנמצאת משמאל לציר ה-y.
CD הוא מיתר במעגל, המקביל לציר ה-x, כך ש-C נמצאת משמאל ל-D. הנקודה E היא אמצע המיתר CD.

פתרון



E אמצע CD

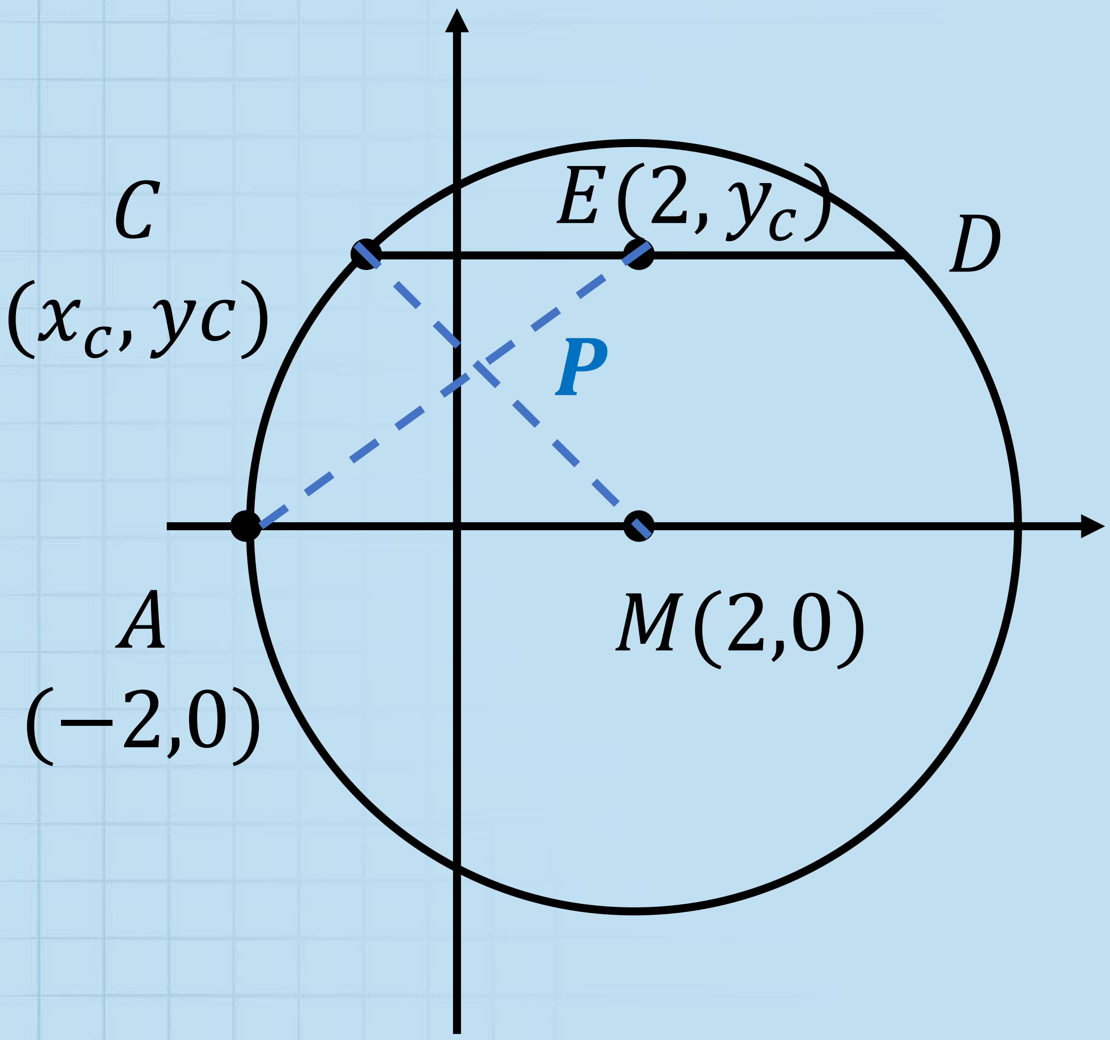
ME, ישר היוצא ממרכז המעגל
וחוצה מיתר ומכאן שהוא גם
מאונך לו $ME \perp CD$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{E(2, y_c)}$

א. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי עליו מונח מפגש הישרים AE ו-CM.

פתרון



נסמן את המקום הגיאומטרי
$P(x_P, y_P)$

נבטא את שיעורי הנקודה C באמצעות שיעורי המקום הגיאומטרי P.
נציב את שיעורי הנקודה במשוואת המעגל שהרי היא עליו ולכן מקיימת את משוואתו

א. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי עליו מונח מפגש הישרים AE ו-CM.

פתרון

משוואת הישר AE העובר דרך הנקודה $P(x_P,y_P)$ ודרך $A(-2,0)$

$$m_{AE}=\frac{y_P}{x_P+2}$$

דרך הנקודה $A(-2,0)$

$$\boldsymbol{y=\frac{y_P}{x_P+2}(x+2)}$$

א. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי עליו מונח מפגש הישרים AE ו-CM.

פתרון

הנקודה $E(2,y_c)$ על הישר ולכן מקיימת את משוואתו :

$$y_c = \frac{y_P}{x_P+2}(2+2)$$

$$\boxed{y_c = \frac{4y_P}{x_P+2}}$$

א. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי עליו מונח מפגש הישרים AE ו-CM.

פתרון

משוואת הישר CM העובר דרך הנקודה $P(x_P,y_P)$ ודרך $M(2,0)$

$$m_{CM}=\frac{y_P}{x_P-2}$$

דרך הנקודה $M(2,0)$

$$\boldsymbol{y=\frac{y_P}{x_P-2}(x-2)}$$

א. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי עליו מונח מפגש הישרים AE ו-CM.

פתרון

הנקודה $C(x_c, y_c)$ על הישר ולכן מקיימת את משוואתו:

$$y_c = \frac{y_P}{x_P - 2}(x_c - 2)$$

נציב את הביטוי שקיבלנו עבור y_c באמצעות המקום הגיאומטרי P

$$\frac{4y_P}{x_P + 2} = \frac{y_P}{x_P - 2}(x_c - 2)$$

א. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי עליו מונח מפגש הישרים AE ו-CM.

פתרון

$$\frac{4y_P}{x_P+2}=\frac{y_P}{x_P-2}(x_c-2)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{4(x_P-2)}{x_P+2}+2=x_c}}$$

א. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי עליו מונח מפגש הישרים AE ו-CM.

פתרון

$$C(x_c, y_c) = \left(\frac{4(x_P - 2)}{x_P + 2} + 2, \frac{4y_P}{x_P + 2}\right)$$

הנקודה C על המעגל ולכן מקיימת את משוואתו :

$$(x_c - 2)^2 + {y_c}^2 = 16$$

א. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי עליו מונח מפגש הישרים AE ו-CM.

פתרון

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{4(x_P-2)}{x_P+2}+2-2\right)^2+\left(\frac{4y_P}{x_P+2}\right)^2=16$$

$$\left(\frac{4(x_P-2)}{x_P+2}\right)^2+\left(\frac{4y_P}{x_P+2}\right)^2=16$$

א. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי עליו מונח מפגש הישרים AE ו-CM.

פתרון

$$16\,(x_P-2)^2+16{y_P}^2=16\,(x_P+2)^2$$

$$ {x_P}^2-4x_P+4+{y_P}^2={x_P}^2-4x_P+4$$

$${y_P}^2=8x_P$$ **פרבולה**

ב. נסמן ב-B את נקודת החיתוך של המעגל הנ"ל והמקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' שנמצאת ברביע הראשון.
מצא את הזוית החדה שבין המשיק למעגל בנקודה B לבין המשיק למקום הגיאומטרי הנ"ל בנקודה B.

פתרון

נמצא את הנקודה B :

$$y^2 = 8x$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 16$$

$$\Downarrow$$

$$(x-2)^2 + 8x = 16$$

ב. נסמן ב-B את נקודת החיתוך של המעגל הנ"ל והמקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' שנמצאת ברביע הראשון.
מצא את הזוית החדה שבין המשיק למעגל בנקודה B לבין המשיק למקום הגיאומטרי הנ"ל בנקודה B.

פתרון

$$x^2 - 4x + 4 + 8x = 16$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x + 6)(x - 2) = 0$$

$$x = -6 \qquad x = 2$$

ב. נסמן ב-B את נקודת החיתוך של המעגל הנ"ל והמקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' שנמצאת ברביע הראשון.
מצא את הזוית החדה שבין המשיק למעגל בנקודה B לבין המשיק למקום הגיאומטרי הנ"ל בנקודה B.

פתרון

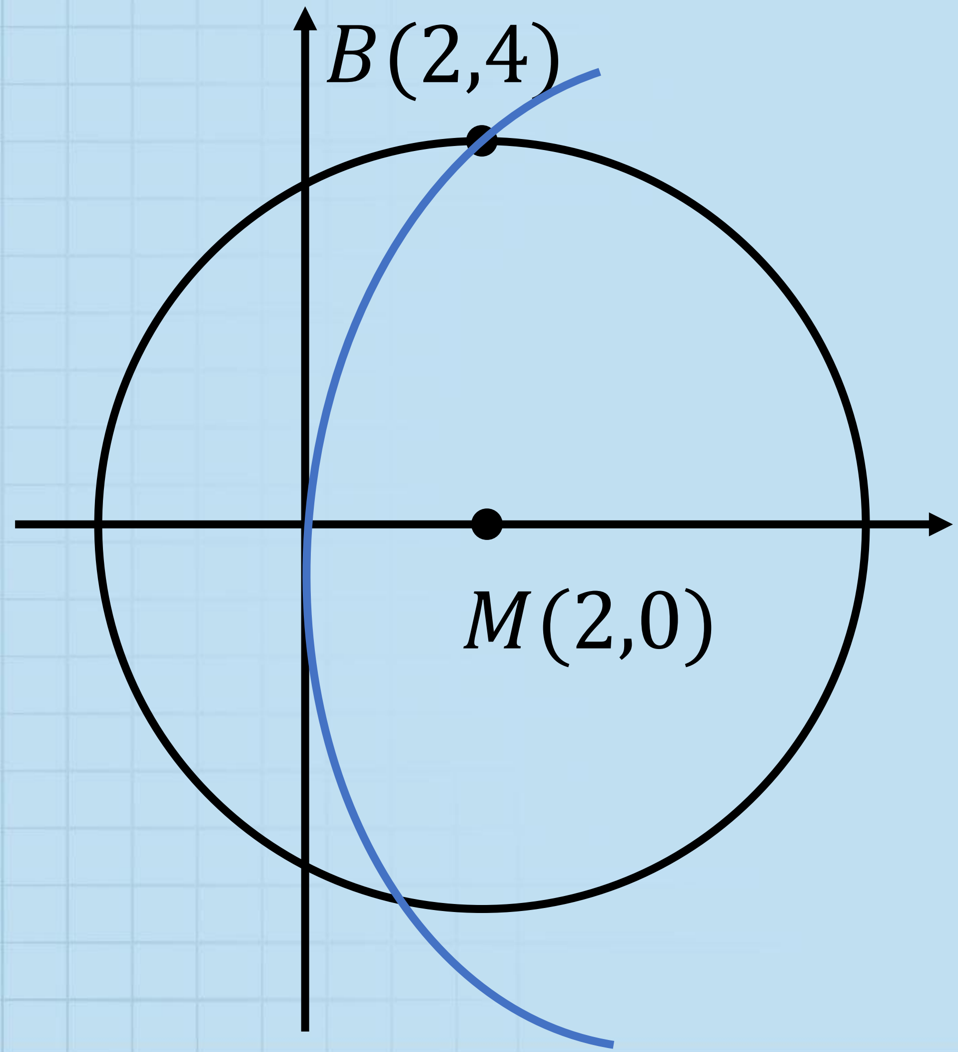
הנקודה B ברביע הראשון: $x_B = 2$ $\Leftarrow$ ${y_B}^2 = 8 \cdot 2$

$y_B = \pm 4$

הנקודה B ברביע הראשון: $B(2,4)$

ב. נסמן ב-B את נקודת החיתוך של המעגל הנ"ל והמקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' שנמצאת ברביע הראשון.
מצא את הזוית החדה שבין המשיק למעגל בנקודה B לבין המשיק למקום הגיאומטרי הנ"ל בנקודה B.

פתרון

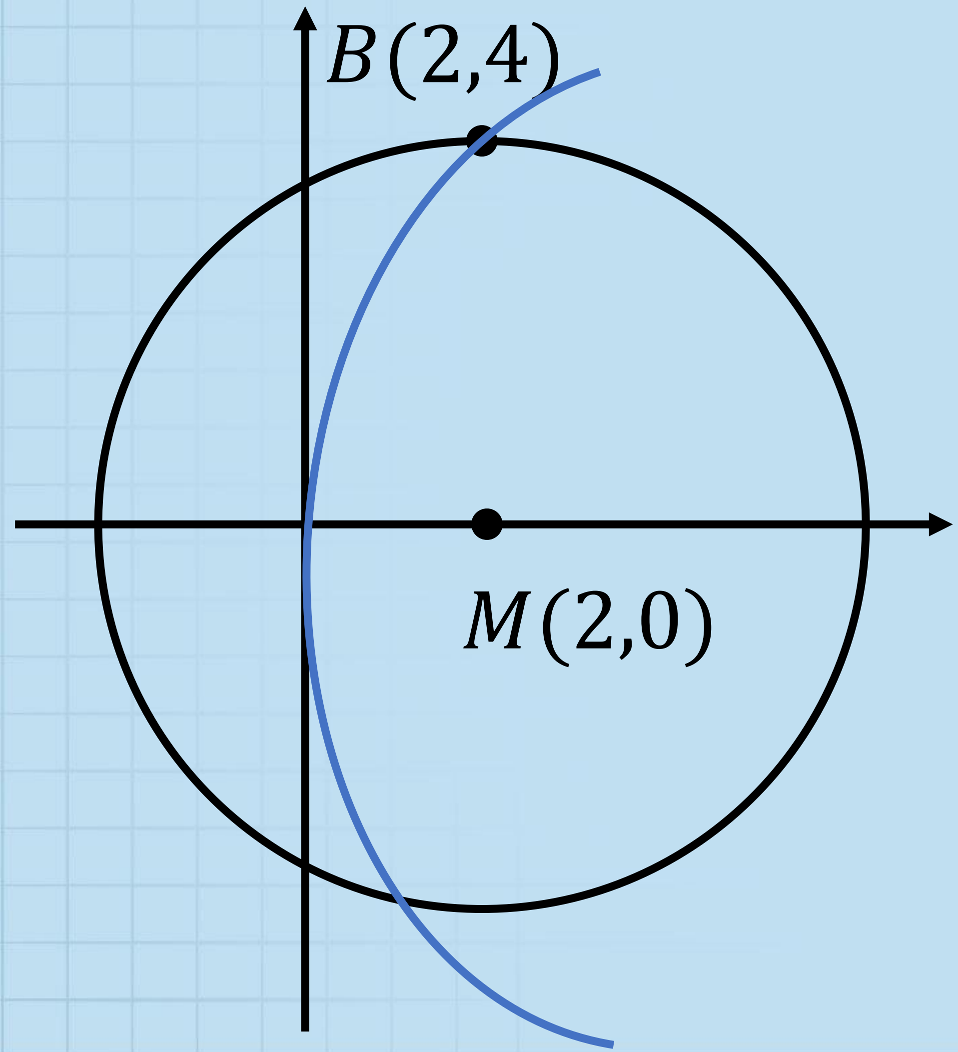


הישר המשיק למעגל בנקודה B
מקביל לציר x

הזווית שתיווצר בין המשיק
לפרבולה לבין המשיק למעגל, שווה
לזווית שתיווצר בין המשיק
לפרבולה וציר ה- x

ב. נסמן ב-B את נקודת החיתוך של המעגל הנ"ל והמקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' שנמצאת ברביע הראשון.
מצא את הזוית החדה שבין המשיק למעגל בנקודה B לבין המשיק למקום הגיאומטרי הנ"ל בנקודה B.

פתרון

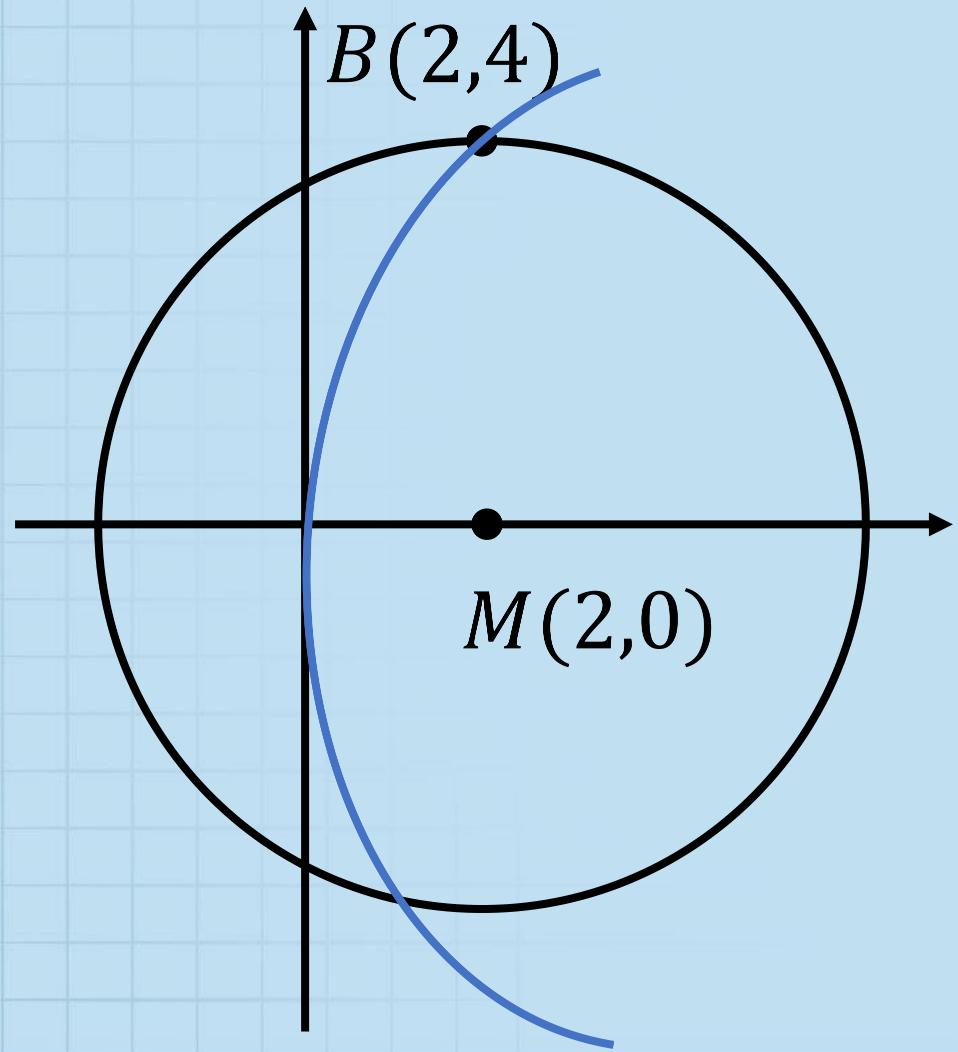


שיפוע משיק לפרבולה בנקודה שעליה:

$$m=\frac{p}{y_0}=\frac{4}{4}=1$$

ב. נסמן ב-B את נקודת החיתוך של המעגל הנ״ל והמקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א׳ שנמצאת ברביע הראשון.
מצא את הזווית החדה שבין המשיק למעגל בנקודה B לבין המשיק למקום הגיאומטרי הנ״ל בנקודה B.

פתרון



$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 1$$

באמצעות מחשבון, α זווית חדה:

$$\boldsymbol{\alpha = 45°}$$

בהצלחה