פתרון תרגיל

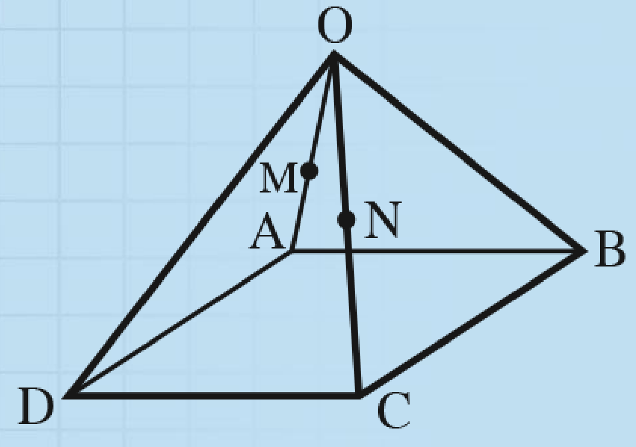
הוכחות גיאומטריות בעזרת המכפלה הסקלרית

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 378, ת. 42

המצגת נערכה ע"י **שירי דוברין**

השאלה



42) בפירמידה ABCDO הבסיס ABCD הוא מקבילית.

נסמן: $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AD}$, $\underline{w} = \overrightarrow{AO}$. הנקודה

N נמצאת על OC ומקיימת $\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OC}$, $0 < t < 1$.

הנקודה M היא אמצע AO.

א. הבע את $\overrightarrow{MN}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t.

ב. הוכח: אם $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור ABCD אז הוא מקביל ל- $\overrightarrow{AC}$.

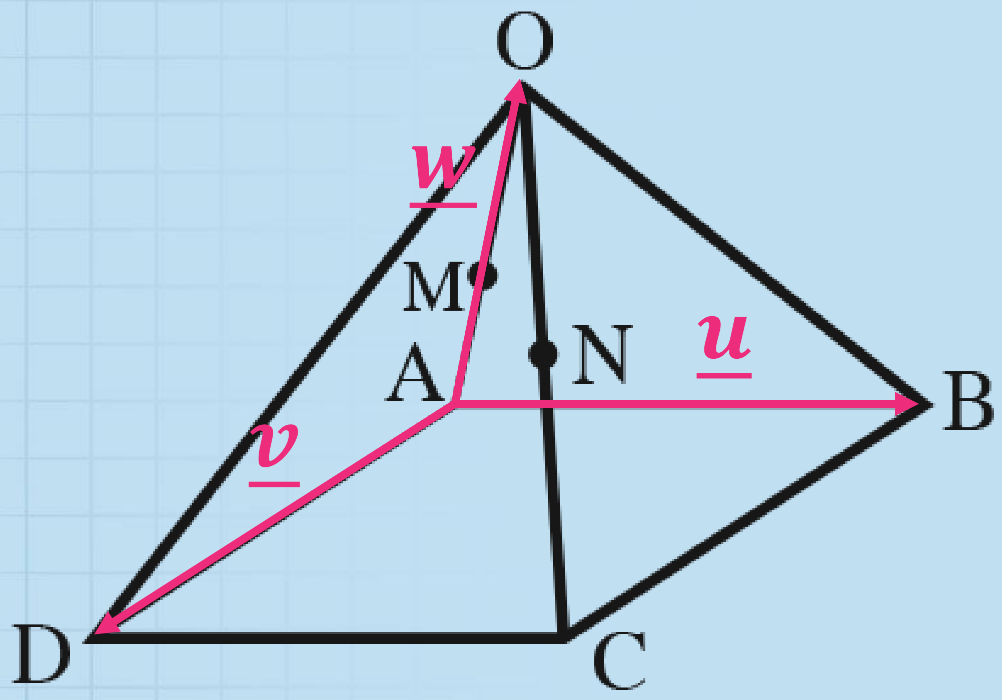
ג. נתון: $t \neq \frac{1}{2}$, $|\underline{v}| = |\underline{u}|$. הוכח: $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AO}$ אם ורק אם $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{MN}$.

ד. האם הטענה נכונה כאשר $t = \frac{1}{2}$? הסבר.

N נמצאת על OC ומקיימת $\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OC}$, $0 < t < 1$. הנקודה M היא אמצע AO.

א. הבע את $\overrightarrow{MN}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t.

פתרון



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$$

$$= \frac{1}{2}\underline{w} + t\overrightarrow{OC}$$

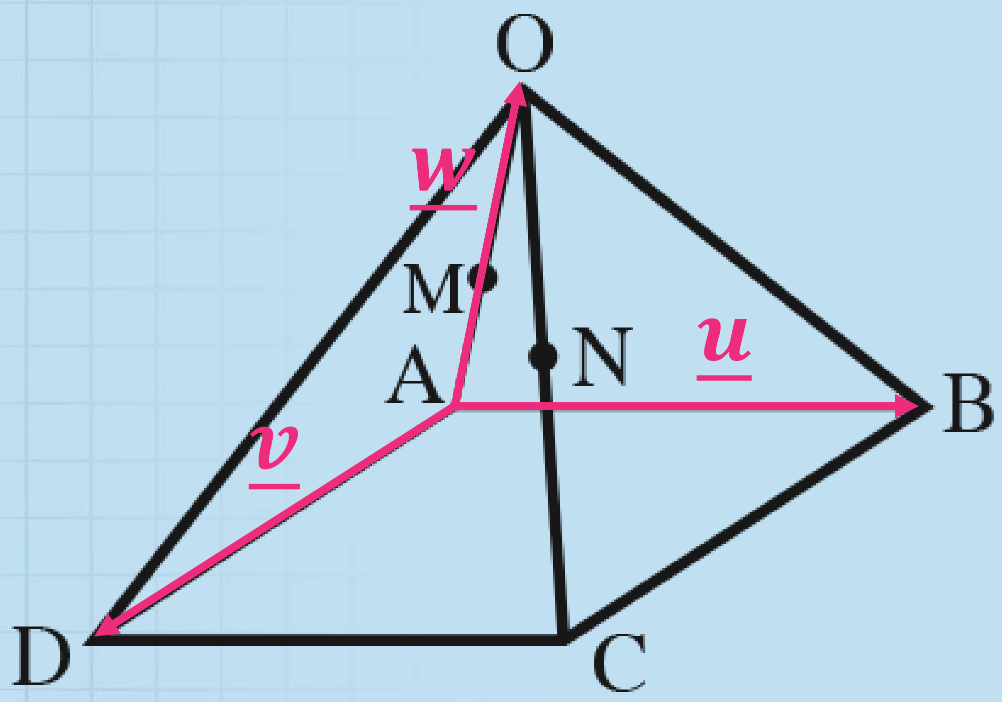
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= -\underline{w} + \underline{u} + \underline{v}$$

N נמצאת על OC ומקיימת $\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OC}$, $0 < t < 1$. הנקודה M היא אמצע AO.

א. הבע את $\overrightarrow{MN}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t.

פתרון



$$\Downarrow$$

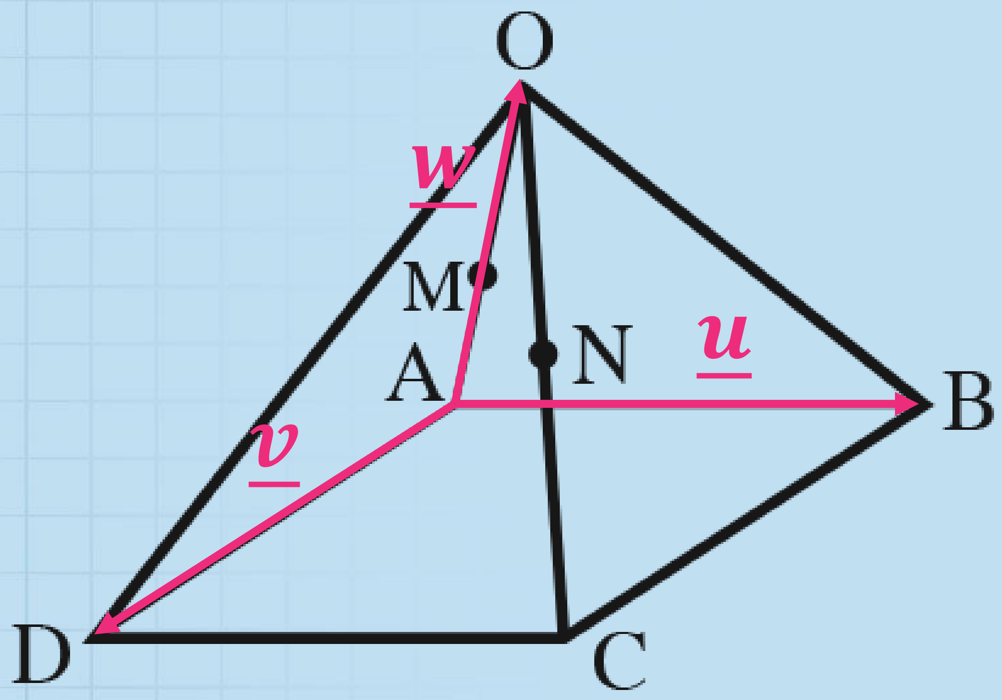
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\underline{w} + t(-\underline{w} + \underline{u} + \underline{v})$$

$$\overrightarrow{MN} = t\underline{u} + t\underline{v} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\underline{w}$$

N נמצאת על OC ומקיימת $\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OC}$, $0 < t < 1$. הנקודה M היא אמצע AO.

ב. הוכח: אם $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור ABCD אז הוא מקביל ל- $\overrightarrow{AC}$.

פתרון



$$\overrightarrow{MN} \parallel ABCD$$

$$\Downarrow$$

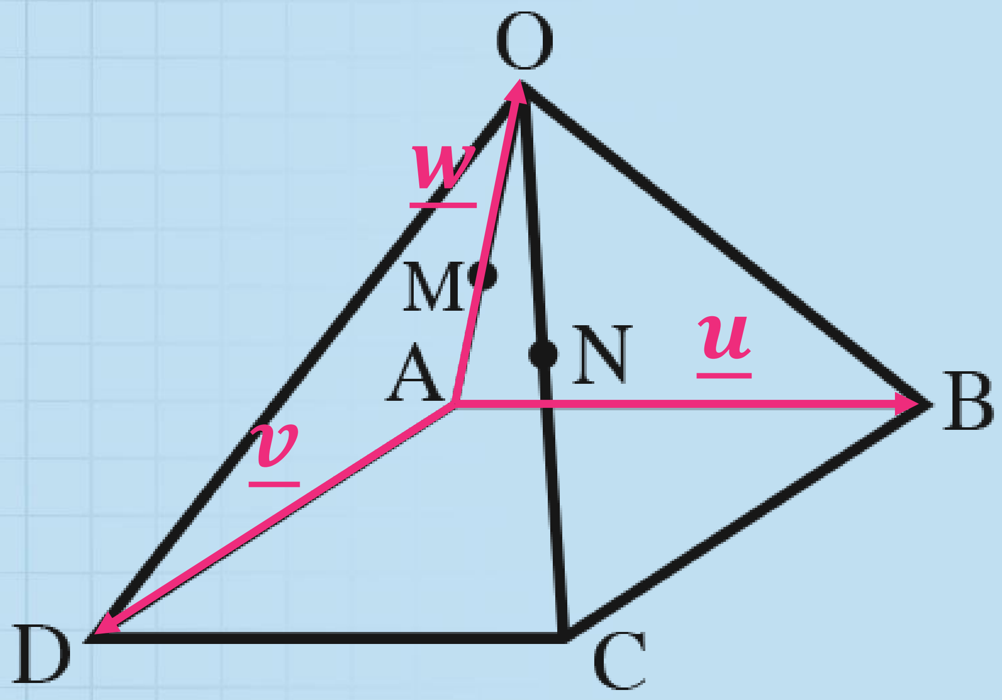
הווקטור $\overrightarrow{MN}$ צירוף ליניארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בלבד.

הווקטורים הפורשים את מישור $ABCD$

N נמצאת על OC ומקיימת $\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OC}$, $0 < t < 1$. הנקודה M היא אמצע AO.

ב. הוכח: אם $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור ABCD אז הוא מקביל ל- $\overrightarrow{AC}$.

פתרון



$$\overrightarrow{MN} = t\underline{u} + t\underline{v} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\underline{w}$$

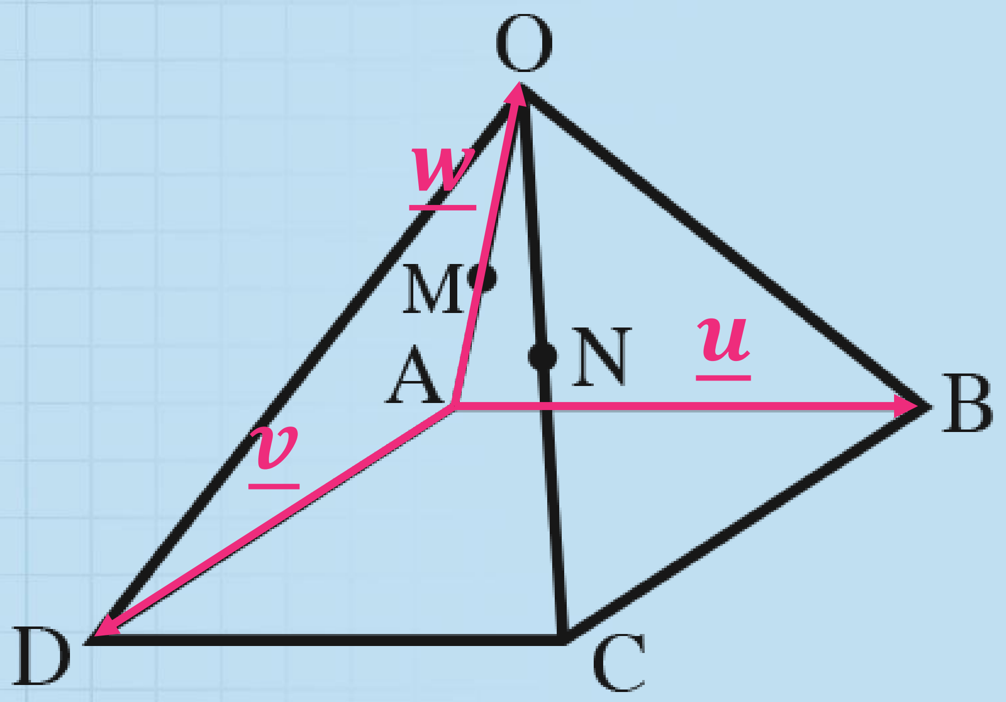
נדרוש שהמקדם של הווקטור $\underline{w}$ יהיה שווה לאפס

$$t = \frac{1}{2}$$

N נמצאת על OC ומקיימת $\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OC}$, $0 < t < 1$. הנקודה M היא אמצע AO.

ב. הוכח: אם $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור ABCD אז הוא מקביל ל- $\overrightarrow{AC}$.

פתרון



$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$$

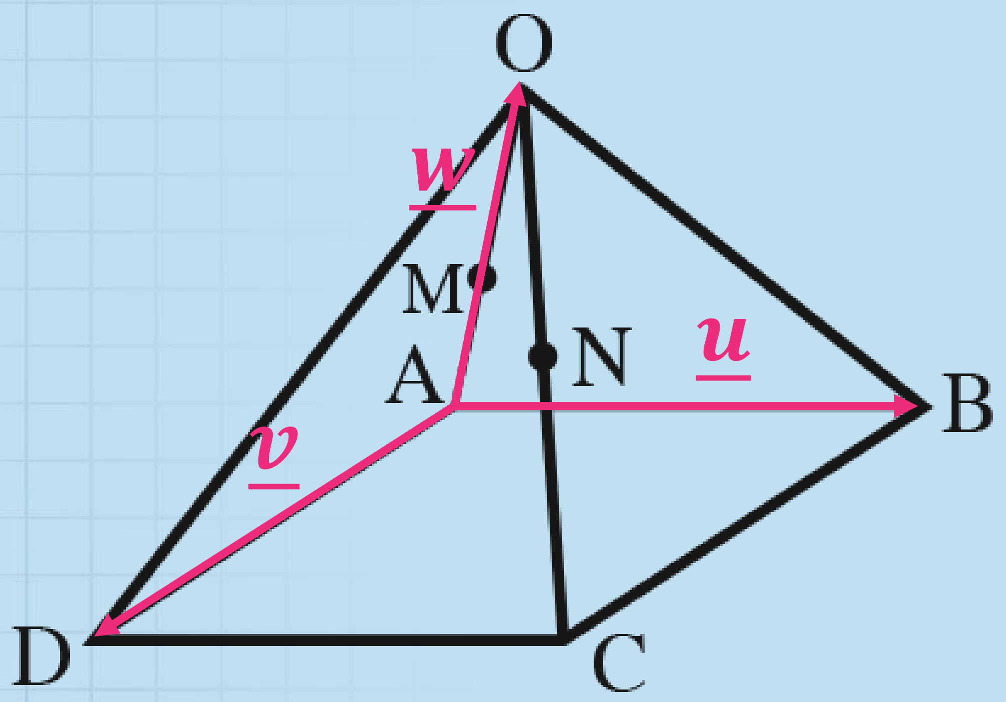
$$\Downarrow$$

הווקטורים צירוף ליניארי זה של זה, הם מקבילים או מתלכדים

N נמצאת על OC ומקיימת $\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OC}$, $0 < t < 1$. הנקודה M היא אמצע AO.

ב. הוכח: אם $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור ABCD אז הוא מקביל ל- $\overrightarrow{AC}$.

פתרון



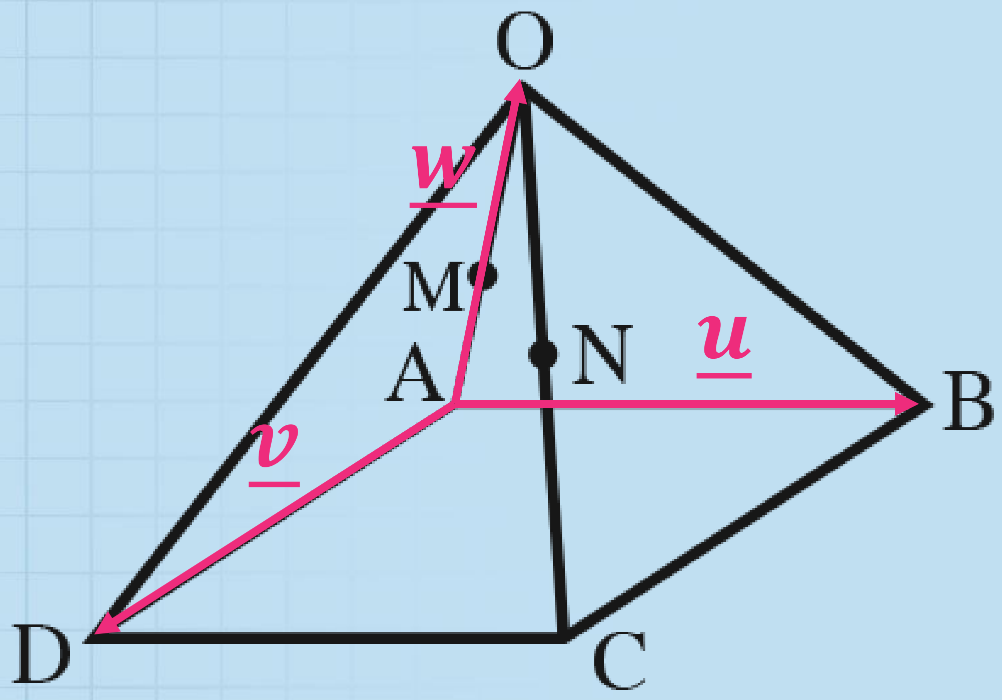
עפ״י הנתון $\overrightarrow{MN} \parallel ABCD$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AC}$$

ג. נתון: $t \neq \frac{1}{2}$, $|\underline{v}| = |\underline{u}|$. הוכח: $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{DB}$ אם ורק אם $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB}$.

פתרון



(1) אם $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB}$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

$$\overrightarrow{DB} = -\underline{v} + \underline{u}$$

ג. נתון: $t \neq \frac{1}{2}$, $|\underline{v}| = |\underline{u}|$. הוכח: $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{DB}$ אם ורק אם $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB}$.

פתרון

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

$$\left(t\underline{u} + t\underline{v} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\underline{w}\right) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = 0$$

$$t|\underline{u}|^2 - t\underline{u} \cdot \underline{v} + t\underline{u} \cdot \underline{v} - t|\underline{v}|^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)\underline{u} \cdot \underline{w} - \left(\frac{1}{2} - t\right)\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

ג. נתון: $t \neq \frac{1}{2}$, $|\underline{u}| = |\underline{v}|$. הוכח: $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{DB}$ אם ורק אם $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB}$.

פתרון

$$\left(\frac{1}{2} - t\right)\underline{u} \cdot \underline{w} = \left(\frac{1}{2} - t\right)\underline{v} \cdot \underline{w} \qquad / \div \left(\frac{1}{2} - t\right) \neq 0$$

$$\underline{\boldsymbol{u}} \cdot \underline{\boldsymbol{w}} = \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\boldsymbol{w}}$$

ג. נתון: $t \neq \frac{1}{2}$, $|\underline{v}| = |\underline{u}|$. הוכח: $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{DB}$ אם ורק אם $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB}$.

פתרון

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{DB} = \underline{w}(\underline{u} - \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{w} - \underline{v} \cdot \underline{w}$$

עפ"י הנתון $\underline{\boldsymbol{u}} \cdot \underline{\boldsymbol{w}} = \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\boldsymbol{w}}$

$$\Downarrow$$

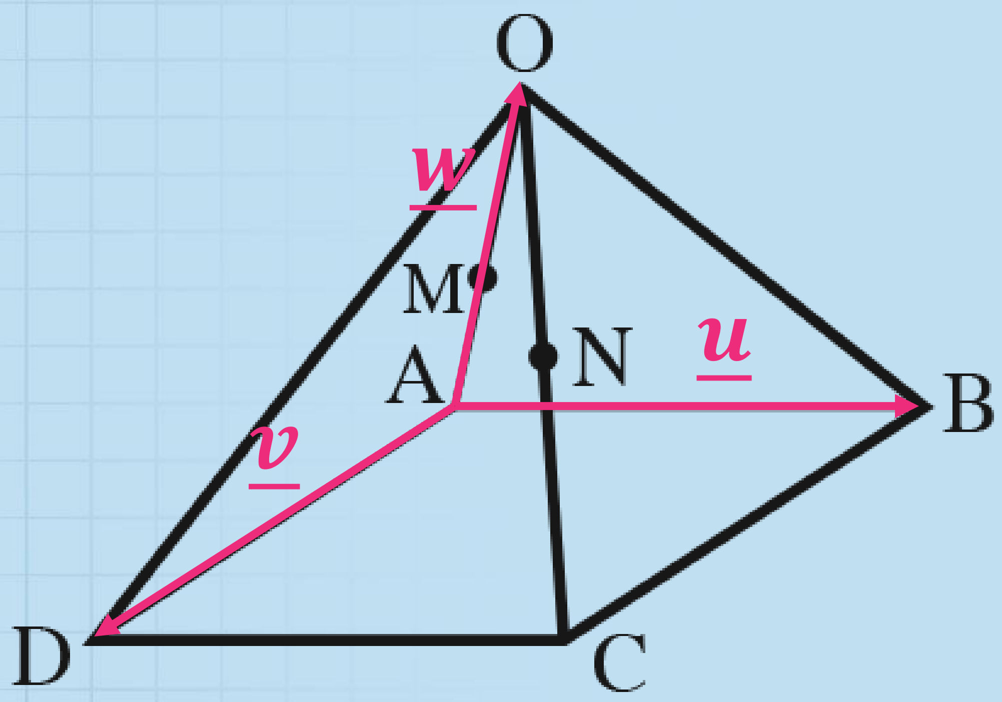
$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AO}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{DB}}$$

ג. נתון: $t \neq \frac{1}{2}$, $|\underline{v}| = |\underline{u}|$. הוכח: $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{DB}$ אם ורק אם $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{MN}$.

פתרון



(2) אם $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{DB}$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

ג. נתון: $t \neq \frac{1}{2}$, $|\underline{v}| = |\underline{u}|$. הוכח: $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{DB}$ אם ורק אם $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB}$.

פתרון

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} - \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

$$\underline{\boldsymbol{u}} \cdot \underline{\boldsymbol{w}} = \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\boldsymbol{w}}$$

ג. נתון: $t \neq \frac{1}{2}$, $|\underline{v}| = |\underline{u}|$. הוכח: $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{DB}$ אם ורק אם $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB}$.

פתרון

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = \left(\frac{1}{2} - t\right)\underline{u} \cdot \underline{w} - \left(\frac{1}{2} - t\right)\underline{v} \cdot \underline{w}$$

$\Downarrow$

עפ"י הנתון $\underline{\boldsymbol{u}} \cdot \underline{\boldsymbol{w}} = \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\boldsymbol{w}}$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

$\Downarrow$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{MN}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{DB}}$$

ד. האם הטענה נכונה כאשר $t = \frac{1}{2}$? הסבר.

פתרון

אם $t = \frac{1}{2}$ לא ניתן לחלק בביטוי $\left(\frac{1}{2} - t\right)$ והוא יהווה אופציה לקיום התנאי

$$\left(\frac{1}{2} - t\right)\underline{u} \cdot \underline{w} = \left(\frac{1}{2} - t\right)\underline{v} \cdot \underline{w}$$

ד. האם הטענה נכונה כאשר $t = \frac{1}{2}$? הסבר.

פתרון

$\Downarrow$

הטענה **אינה נכונה** עבור $t = \frac{1}{2}$

בהצלחה