פתרון תרגיל

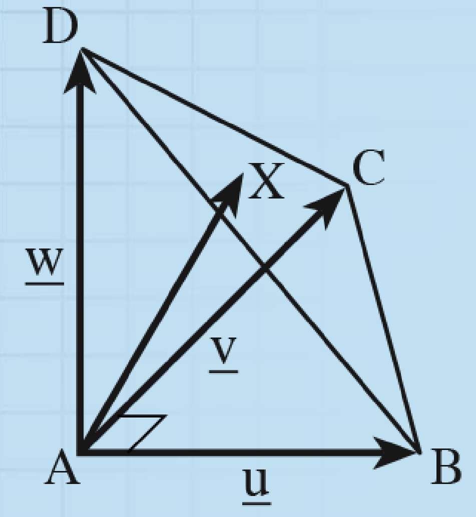
חישובים במרחב בעזרת המכפלה הסקלרית (הווקטור הגיאומטרי)

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 368, ת. 42

המצגת נערכה ע"י **שירי דוברין**

השאלה



42) בטטראדר ABCD המקצועות AB, AC ו-AD ניצבים זה לזה. נתון: $|AB| = 2$, $|AC| = 3$, $|AD| = 4$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$.

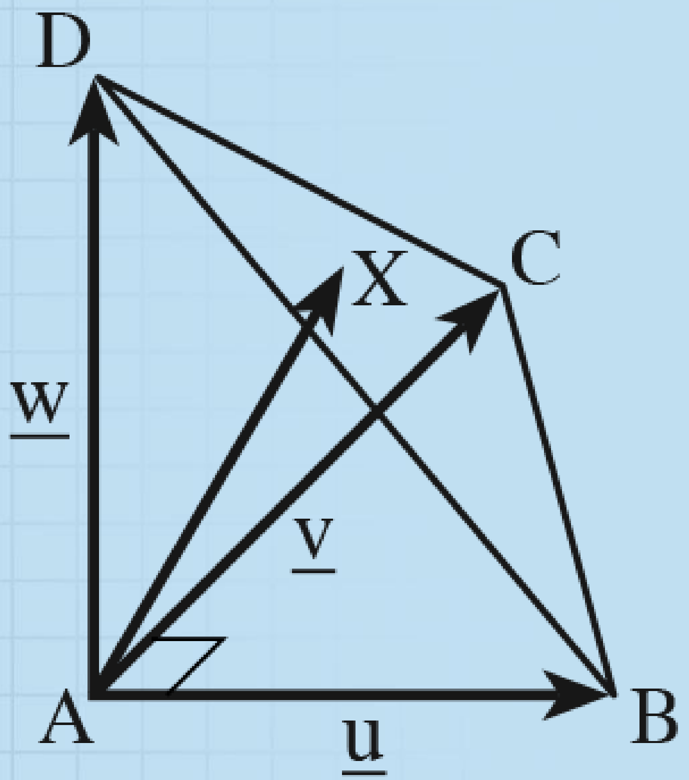
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-$\underline{w}$ וקטור $\overrightarrow{AX}$ היוצר זויות שוות עם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ו-$\overrightarrow{AD}$ כך שהנקודה X היא על הפאה BCD. (**הדרכה:** ניתן להביע את $\overrightarrow{AX}$ בצורה $\overrightarrow{AX} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD}$ כך ש-$a+b+c = 1$ או את $\overrightarrow{BX}$ בצורה $\overrightarrow{BX} = t\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD}$).

ב. חשב את הזוית השווה.

ג. ענה על סעיפים א' ו-ב' אם $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$ והסק מסקנה לגבי הזוית השווה.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ וקטור $\overrightarrow{AX}$ היוצר זויות שוות עם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AD}$
כך שהנקודה X היא על הפאה BCD.

פתרון

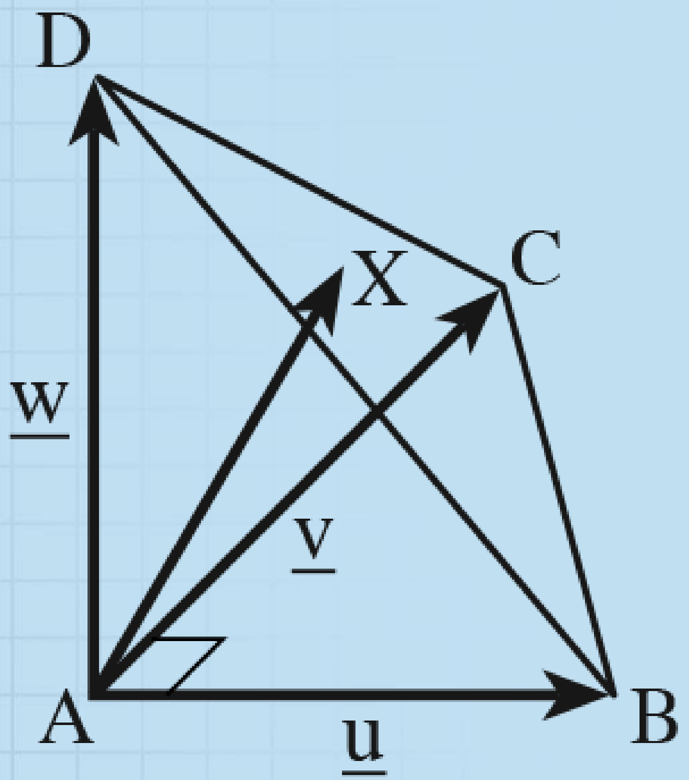


$$|\underline{u}| = 2 \qquad |\underline{v}| = 3 \qquad |\underline{w}| = 4$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ וקטור $\overrightarrow{AX}$ היוצר זויות שוות עם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AD}$ כך שהנקודה X היא על הפאה BCD.

פתרון



הנקודה x על המישור BDC

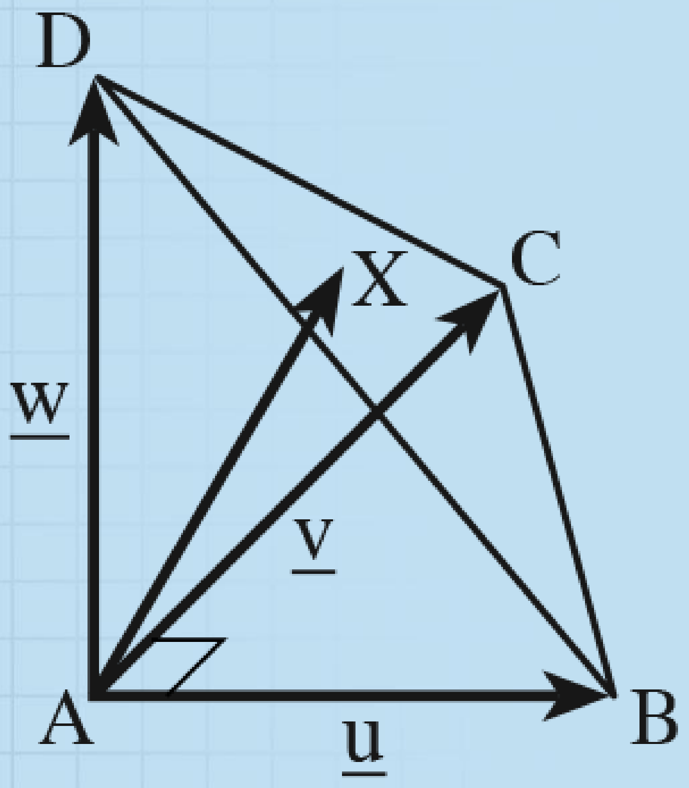
$\Downarrow$

קיימים סקלרים a ו- b כך ש:

$$\overrightarrow{AX} = a\underline{u} + \mathrm{b}\underline{v} + (1 - a - b)\underline{w}$$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ וקטור $\overrightarrow{AX}$ היוצר זויות שוות עם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AD}$
כך שהנקודה X היא על הפאה BCD.

פתרון



הווקטור $\overrightarrow{AX}$ יוצר זוויות שוות
עם $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\overrightarrow{AX}\cdot\underline{u}}{|\overrightarrow{AX}|\cdot|\underline{u}|}=\frac{\overrightarrow{AX}\cdot\underline{v}}{|\overrightarrow{AX}|\cdot|\underline{v}|}=\frac{\overrightarrow{AX}\cdot\underline{w}}{|\overrightarrow{AX}|\cdot|\underline{w}|}$$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ וקטור $\overrightarrow{AX}$ היוצר זויות שוות עם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AD}$
כך שהנקודה X היא על הפאה BCD.

פתרון

$$\overrightarrow{AX}\cdot\underline{u}=\left(a\underline{u}+\mathrm{b}\underline{v}+(1-a-b)\underline{w}\right)\cdot\underline{u}=a\left|\underline{u}\right|^2=4a$$

$$\overrightarrow{AX}\cdot\underline{v}=\left(a\underline{u}+\mathrm{b}\underline{v}+(1-a-b)\underline{w}\right)\cdot\underline{v}=b\left|\underline{v}\right|^2=9b$$

$$\overrightarrow{AX}\cdot\underline{w}=\left(a\underline{u}+\mathrm{b}\underline{v}+(1-a-b)\underline{w}\right)\cdot\underline{w}$$
$$=(1-a-b)\left|\underline{w}\right|^2=16(1-a-b)$$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ וקטור $\overrightarrow{AX}$ היוצר זויות שוות עם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AD}$
כך שהנקודה X היא על הפאה BCD.

פתרון

$\Downarrow$

$$\frac{\overrightarrow{AX}\cdot \underline{u}}{|\underline{u}|}=\frac{\overrightarrow{AX}\cdot \underline{v}}{|\underline{v}|}=\frac{\overrightarrow{AX}\cdot \underline{w}}{|\underline{w}|}$$

$$\frac{4a}{2}=\frac{9b}{3}=\frac{16(1-a-b)}{4}$$

$$\boldsymbol{2a=3b=4(1-a-b)}$$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ וקטור $\overrightarrow{AX}$ היוצר זויות שוות עם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AD}$
כך שהנקודה X היא על הפאה BCD.

פתרון

$$(1):\quad a = 1.5b$$

$$(2):\quad 3b = 4 - 4a - 4b$$

$$7b = 4 - 4a \quad \Rightarrow \quad 7b = 4 - 4 \cdot 1.5b = 4 - 6b$$

$$13b = 4$$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ וקטור $\overrightarrow{AX}$ היוצר זויות שוות עם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AD}$ כך שהנקודה X היא על הפאה BCD.

פתרון

$$\boldsymbol{b = \frac{4}{13}}$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{13} = \boldsymbol{\frac{6}{13}} \quad \Rightarrow \quad 1 - a - b = 1 - \frac{6}{13} - \frac{4}{13} = \boldsymbol{\frac{3}{13}}$$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ וקטור $\overrightarrow{AX}$ היוצר זויות שוות עם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AD}$
כך שהנקודה X היא על הפאה BCD.

פתרון

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{AX}=\frac{6}{13}\underline{u}+\frac{4}{13}\underline{v}+\frac{3}{13}\underline{w}$$

ב. חשב את הזווית השווה.

פתרון

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AX}\cdot \underline{u}}{\left|\overrightarrow{AX}\right|\cdot\left|\underline{u}\right|}$$

$$\overrightarrow{AX}\cdot \underline{u} = 4a = 4\cdot\frac{6}{13} = \frac{24}{13}$$

ב. חשב את הזווית השווה.

פתרון

$$|\overrightarrow{AX}| = \sqrt{\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AX}} = \sqrt{\left(\frac{6}{13}\underline{u}+\frac{4}{13}\underline{v}+\frac{3}{13}\underline{w}\right)\cdot\left(\frac{6}{13}\underline{u}+\frac{4}{13}\underline{v}+\frac{3}{13}\underline{w}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{169}|\underline{u}|^2+\frac{16}{169}|\underline{v}|^2+\frac{9}{169}|\underline{w}|^2}$$

ב. חשב את הזווית השווה.

פתרון

$$\left|\overrightarrow{AX}\right| = \sqrt{\frac{36}{169}\cdot 4+\frac{16}{169}\cdot 9+\frac{9}{169}\cdot 16} = \sqrt{\frac{432}{169}} = \boldsymbol{\frac{12\sqrt{3}}{13}}$$

ב. חשב את הזווית השווה.

פתרון

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AX}\cdot \underline{u}}{\left|\overrightarrow{AX}\right|\cdot\left|\underline{u}\right|} = \frac{\frac{24}{13}}{\frac{12\sqrt{3}}{13}\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

באמצעות מחשבון:

$$\alpha = 54.74^\circ$$

ג. ענה על סעיפים א׳ ו-ב׳ אם $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$ והסק מסקנה לגבי הזוית השווה.

פתרון

$$\overrightarrow{AX} \cdot \underline{u} = \overrightarrow{AX} \cdot \underline{v} = \overrightarrow{AX} \cdot \underline{w}$$

$$a|\underline{u}|^2 = b|\underline{v}|^2 = (1 - a - b)|\underline{w}|^2$$

$$a = b = (1 - a - b)$$

ג. ענה על סעיפים א׳ ו-ב׳ אם $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$ והסק מסקנה לגבי הזוית השווה.

פתרון

$$a = b = \frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$$

ג. ענה על סעיפים א' ו-ב' אם $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$ והסק מסקנה לגבי הזוית השווה.

פתרון

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AX} \cdot \underline{u}}{|\overrightarrow{AX}| \cdot |\underline{u}|}$$

$$\overrightarrow{AX} \cdot \underline{u} = a|\underline{u}|^2 = \frac{1}{3}|\underline{u}|^2$$

ג. ענה על סעיפים א׳ ו-ב׳ אם $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$ והסק מסקנה לגבי הזוית השווה.

פתרון

$$|\overrightarrow{AX}| = \sqrt{\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AX}} = \sqrt{\frac{1}{3}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) \cdot \frac{1}{3}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{|\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3|\underline{u}|^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}|\underline{u}|$$

ג. ענה על סעיפים א׳ ו-ב׳ אם $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$ והסק מסקנה לגבי הזוית השווה.

פתרון

$\Downarrow$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AX}\cdot\underline{u}}{|\overrightarrow{AX}|\cdot|\underline{u}|} = \frac{\frac{1}{3}|\underline{u}|^2}{\frac{\sqrt{3}}{3}|\underline{u}|\cdot|\underline{u}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

באמצעות מחשבון:

$$\boldsymbol{\alpha = 54.74°}$$

בהצלחה