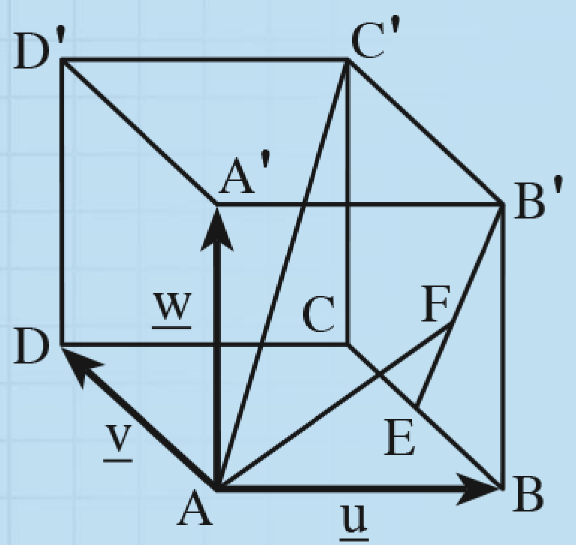
פתרון תרגיל

חישובים במרחב בעזרת המכפלה הסקלרית (הווקטור הגיאומטרי)

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 366, ת. 34

השאלה



34) בקוביה $ABCDA'B'C'D'$ הנקודה E היא אמצע BC.

הנקודה F מקיימת $\overrightarrow{EF} = t\overrightarrow{EB'}$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$,

$\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. הבע את $\overrightarrow{AC'}$ ו-$\overrightarrow{AF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t.

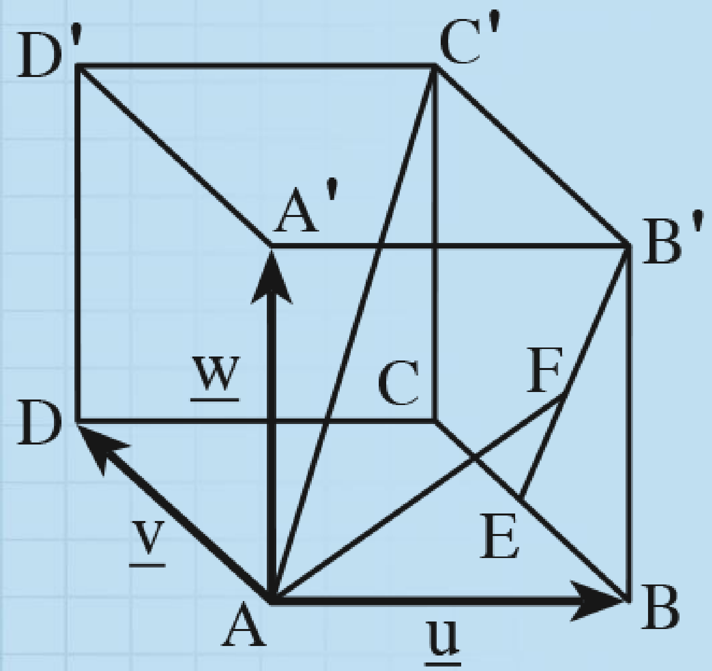
ב. חשב את t עבורו הזווית FAC' היא מינימלית ומצא את הזווית המינימלית.

בקוביה $ABCDA'B'C'D'$ הנקודה E היא אמצע BC.

הנקודה F מקיימת $\overrightarrow{EF} = t\overrightarrow{EB'}$.

א. הבע את $\overrightarrow{AC'}$ ו-$\overrightarrow{AF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t.

פתרון

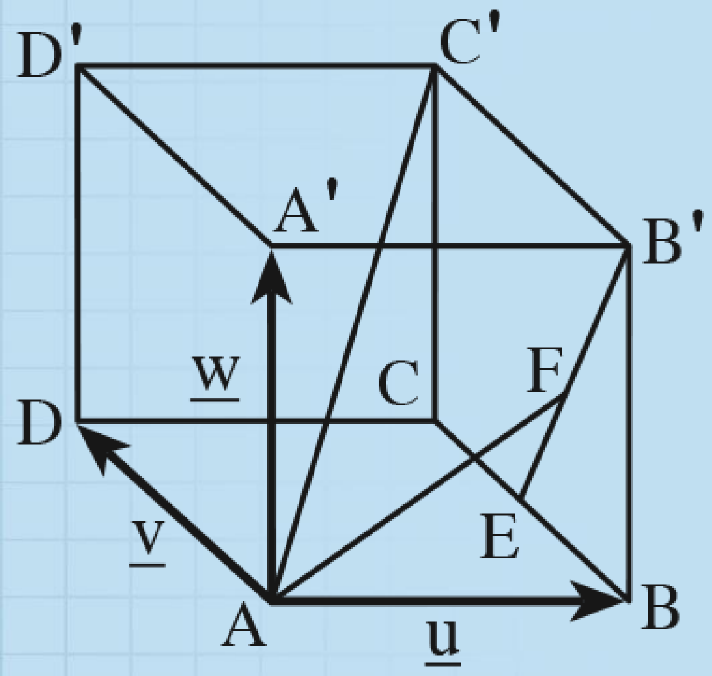


$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$$

בקוביה $ABCDA'B'C'D'$ הנקודה E היא אמצע BC.

הנקודה F מקיימת $\overrightarrow{EF} = t\overrightarrow{EB'}$. א. הבע את $\overrightarrow{AC'}$ ו- $\overrightarrow{AF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t.

פתרון



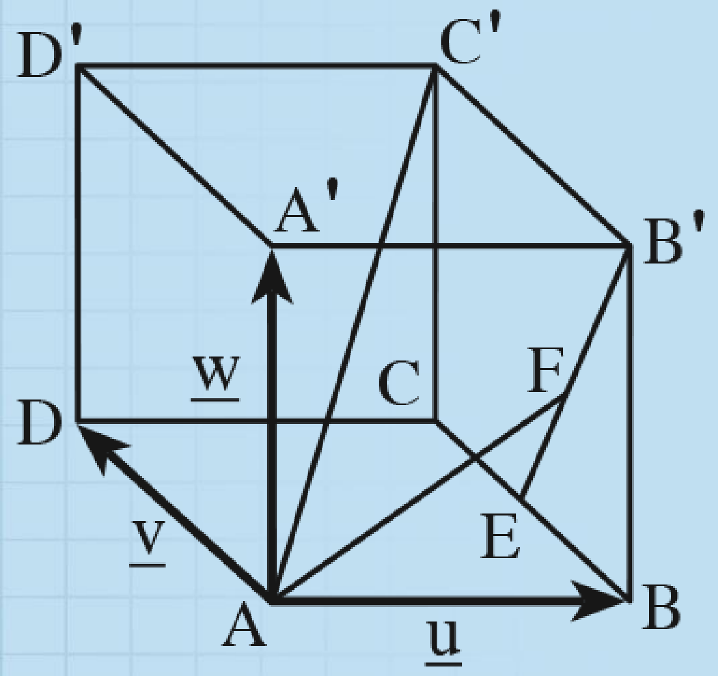
$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + t\overrightarrow{EB'}$$

$$= \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + t\left(-\frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}\right)$$

$$= \underline{u} + \frac{1-t}{2}\underline{v} + t\underline{w}$$

ב. חשב את t עבורו הזווית FAC' היא מינימלית ומצא את הזווית המינימלית.

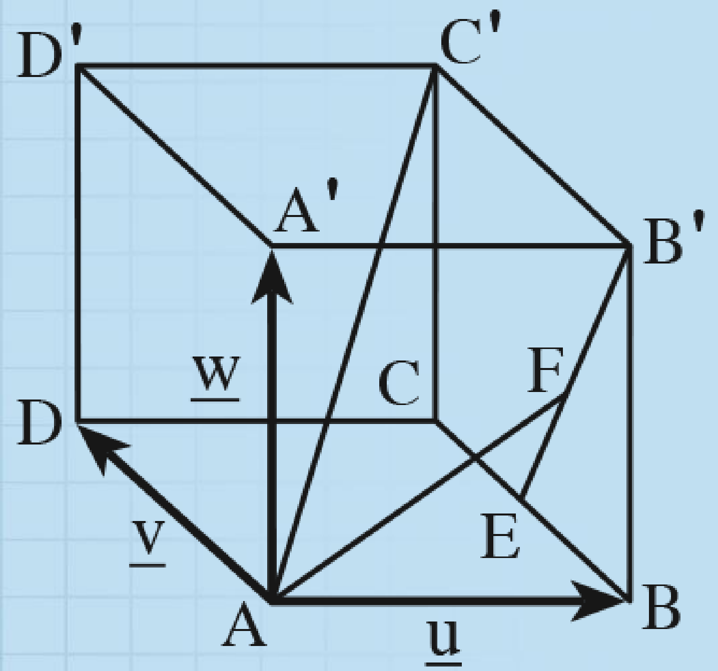
פתרון



$$\cos \measuredangle FAC' = \frac{\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AF}}{\left|\overrightarrow{AC'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AF}\right|}$$

ב. חשב את t עבורו הזוית FAC' היא מינימלית ומצא את הזוית המינימלית.

פתרון



נתון קובייה:

$$|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = a$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{u} &\perp \underline{v} \\ \underline{u} &\perp \underline{w} \\ \underline{v} &\perp \underline{w} \end{aligned}\right\} \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

ב. חשב את t עבורו הזוית FAC' היא מינימלית ומצא את הזוית המינימלית.

פתרון

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AF} = (\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}) \cdot \left(\underline{u}+\frac{1-t}{2}\underline{v}+t\underline{w}\right)$$

$$= |\underline{u}|^2 + \frac{1-t}{2}|\underline{v}|^2 + t|\underline{w}|^2 = a^2\left(1+\frac{1-t}{2}+t\right)$$

$$= \frac{\boldsymbol{a^2}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{3}+\boldsymbol{t})$$

ב. חשב את t עבורו הזוית FAC' היא מינימלית ומצא את הזוית המינימלית.

פתרון

$$\left|\overrightarrow{AC'}\right| = \sqrt{(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})\cdot(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})} = \sqrt{|\underline{u}|^2+|\underline{v}|^2+|\underline{w}|^2}$$

$$= \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$$

ב. חשב את t עבורו הזוית FAC' היא מינימלית ומצא את הזוית המינימלית.

פתרון

$$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{\left(\underline{u} + \frac{1-t}{2}\underline{v} + t\underline{w}\right) \cdot \left(\underline{u} + \frac{1-t}{2}\underline{v} + t\underline{w}\right)}$$

$$= \sqrt{|\underline{u}|^2 + \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 |\underline{v}|^2 + t^2|\underline{w}|^2} = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{(1-t)^2}{4} + t^2\right)}$$

ב. חשב את t עבורו הזוית FAC' היא מינימלית ומצא את הזוית המינימלית.

פתרון

$$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{a^2\left(\frac{4+1-2t+t^2+4t^2}{4}\right)} = \frac{a}{2}\sqrt{5t^2-2t+5}$$

ב. חשב את t עבורו הזוית FAC' היא מינימלית ומצא
את הזוית המינימלית.

פתרון

$$\cos \sphericalangle FAC' = \frac{\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AF}}{\left|\overrightarrow{AC'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AF}\right|} = \frac{\frac{a^2}{2}(t+3)}{\sqrt{3}a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{5t^2 - 2t + 5}}$$

$$= \frac{(t+3)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5t^2 - 2t + 5}}$$

ב. חשב את t עבורו הזוית FAC' היא מינימלית ומצא את הזוית המינימלית.

פתרון

בתחום $0°$ עד $180°$ פונקציית הקוסינוס **יורדת**

עלינו למצוא נקודת **מקסימום** לפונקציה:

$$f(t)=\frac{(t+3)}{\sqrt{5t^2-2t+5}}$$

ב. חשב את t עבורו הזוית FAC' היא מינימלית ומצא את הזוית המינימלית.

פתרון

נדרוש $f'(t)=0$:

$$f'(t)=\frac{1\cdot\sqrt{5t^2-2t+5}-(t+3)\cdot\frac{10t-2}{2\sqrt{5t^2-2t+5}}}{5t^2-2t+5}$$

$$=\frac{5t^2-2t+5-(t+3)\cdot(5t-1)}{\sqrt{5t^2-2t+5}\cdot(5t^2-2t+5)}$$

ב. חשב את t עבורו הזוית FAC' היא מינימלית ומצא
את הזוית המינימלית.

פתרון

$$f'(t)=\frac{-16t+8}{\sqrt{5t^2-2t+2}\cdot(5t^2-2t+2)}=0$$

$$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$$

ב. חשב את t עבורו הזווית FAC' היא מינימלית ומצא את הזווית המינימלית.

פתרון

$$\cos\sphericalangle FAC' = \frac{(t+3)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5t^2-2t+5}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+3\right)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}+5}}$$

$$\cos\sphericalangle FAC' = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\sphericalangle FAC' = 28.13^\circ$$

בהצלחה