פתרון תרגיל

חישובים במרחב בעזרת המכפלה הסקלרית (הווקטור הגיאומטרי)

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 362, ת. 19

השאלה

19) בקוביה $ABCDA'B'C'D'$ שהמקצוע שלה 1 הנקודה E מקיימת $\overrightarrow{D'E} = t\overrightarrow{D'C'}$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

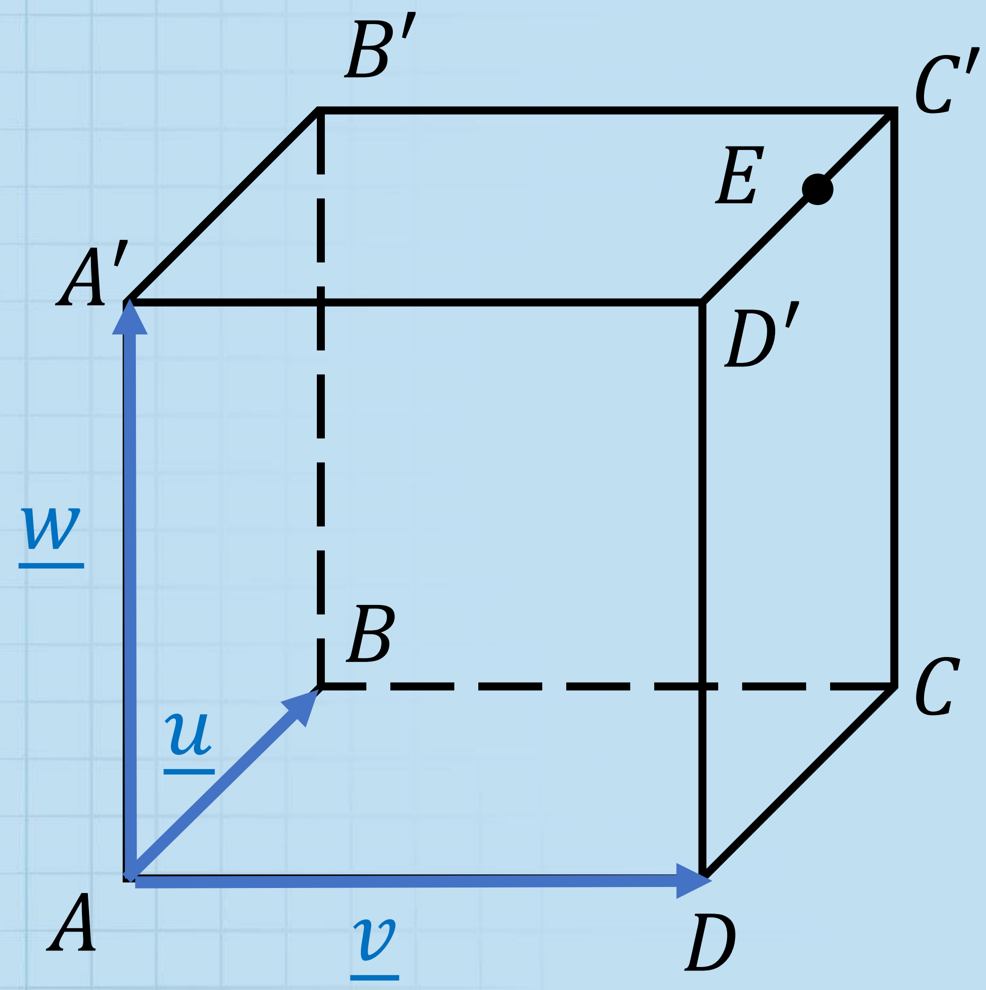
א. הבע את $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t.

ב. מצא את t עבורו: (1) $\sphericalangle CAE = 90^o$. (2) $\sphericalangle CAE = 45^o$.

ג. הבע את $\overrightarrow{CE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t והראה שלא קיים t עבורו $\sphericalangle AEC = 90^o$.

הנקודה E מקיימת $\overrightarrow{D'E} = t\overrightarrow{D'C'}$. א. הבע את $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-t.

פתרון



הנקודה E על הישר $D'C'$

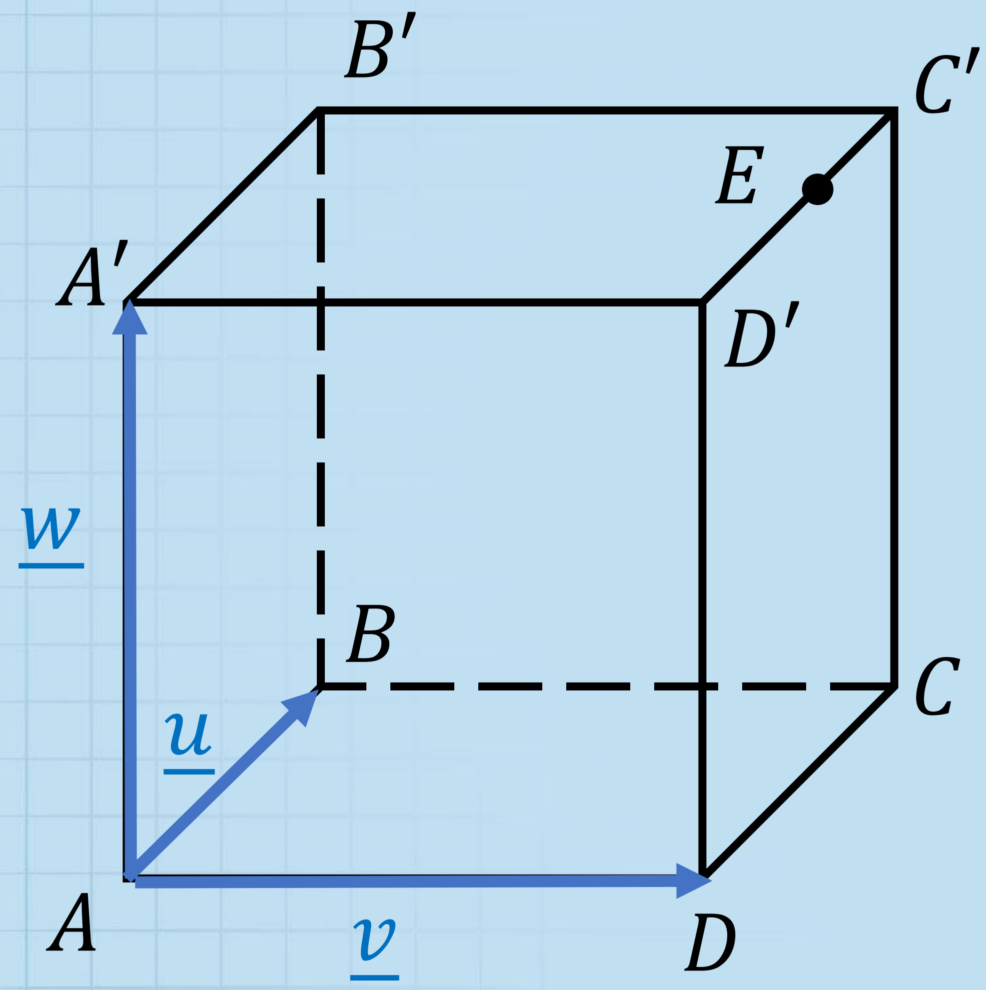
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \underline{v} + \underline{u}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'E}$$

$$= \underline{v} + \underline{w} + t\underline{u}$$

ב. מצא את t עבורו: (1) $\sphericalangle CAE = 90^{\circ}$. (2) $\sphericalangle CAE = 45^{\circ}$.

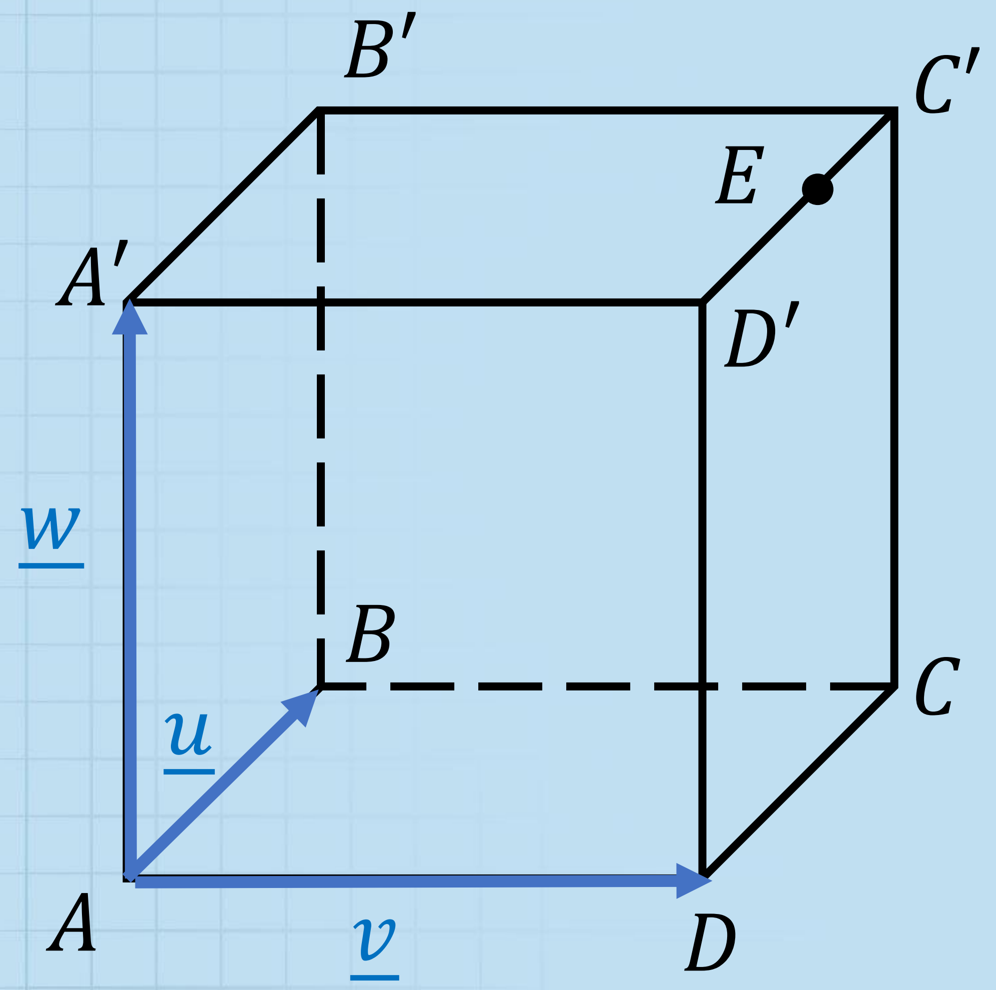
פתרון



$$\cos \sphericalangle CAE = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AE}\right|}$$

ב. מצא את t עבורו: (1) $\measuredangle CAE = 90^o$. (2) $\measuredangle CAE = 45^o$.

פתרון



נתון קובייה שמקצועה 1:

$$|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{u} \perp \underline{v} \\ \underline{u} \perp \underline{w} \\ \underline{v} \perp \underline{w} \end{array}\right\} \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

ב. מצא את t עבורו: (1) $\sphericalangle CAE = 90^o$. (2) $\sphericalangle CAE = 45^o$.

פתרון

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = (\underline{u} + \underline{v}) \cdot (t\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$$

$$= t|\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 = \boldsymbol{t + 1}$$

ב. מצא את t עבורו: (1) $\sphericalangle CAE = 90^{\circ}$. (2) $\sphericalangle CAE = 45^{\circ}$.

פתרון

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v})} = \sqrt{|\underline{u}|^2+|\underline{v}|^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{(t\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})\cdot(t\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})} = \sqrt{t^2|\underline{u}|^2+|\underline{v}|^2+|\underline{w}|^2}$$

$$= \sqrt{t^2+2}$$

ב. מצא את t עבורו: (1) $\sphericalangle CAE = 90^{\circ}$. (2) $\sphericalangle CAE = 45^{\circ}$.

פתרון

$$\cos \sphericalangle CAE = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AE}\right|} = \frac{t+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{t^2+2}}$$

ב. מצא את t עבורו : (1) $\sphericalangle CAE = 90^o$. (2) $\sphericalangle CAE = 45^o$.

פתרון

(1) $\sphericalangle CAE = 90^o$.

$$\cos 90^\circ = 0 = \frac{t+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+2}}$$

$$t = -1$$

ב. מצא את t עבורו: (1) $\sphericalangle CAE = 90^{o}$. (2) $\sphericalangle CAE = 45^{o}$.

פתרון

(2) $\sphericalangle CAE = 45^{o}$.

$$\cos 45^\circ = \frac{t+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{t+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+2}}$$

ב. מצא את t עבורו: (1) $\sphericalangle CAE = 90^{\circ}$. (2) $\sphericalangle CAE = 45^{\circ}$.

פתרון

(2) $\sphericalangle CAE = 45^{\circ}$.

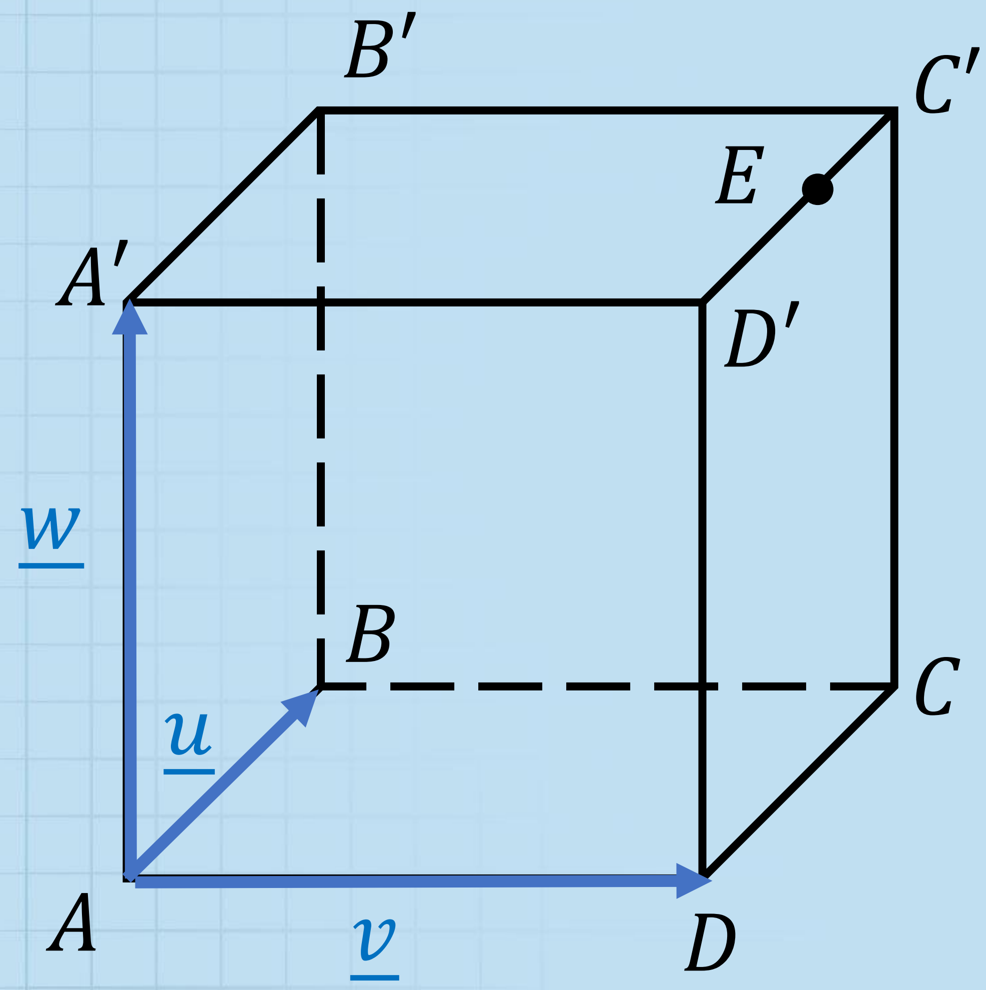
$$\sqrt{t^2+2} = t+1$$

$$t^2+2 = t^2+2t+1$$

$$\boldsymbol{t = \frac{1}{2}}$$

ג. הבע את $\overrightarrow{CE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t והראה שלא קיים t עבורו $\sphericalangle AEC = 90^o$.

פתרון

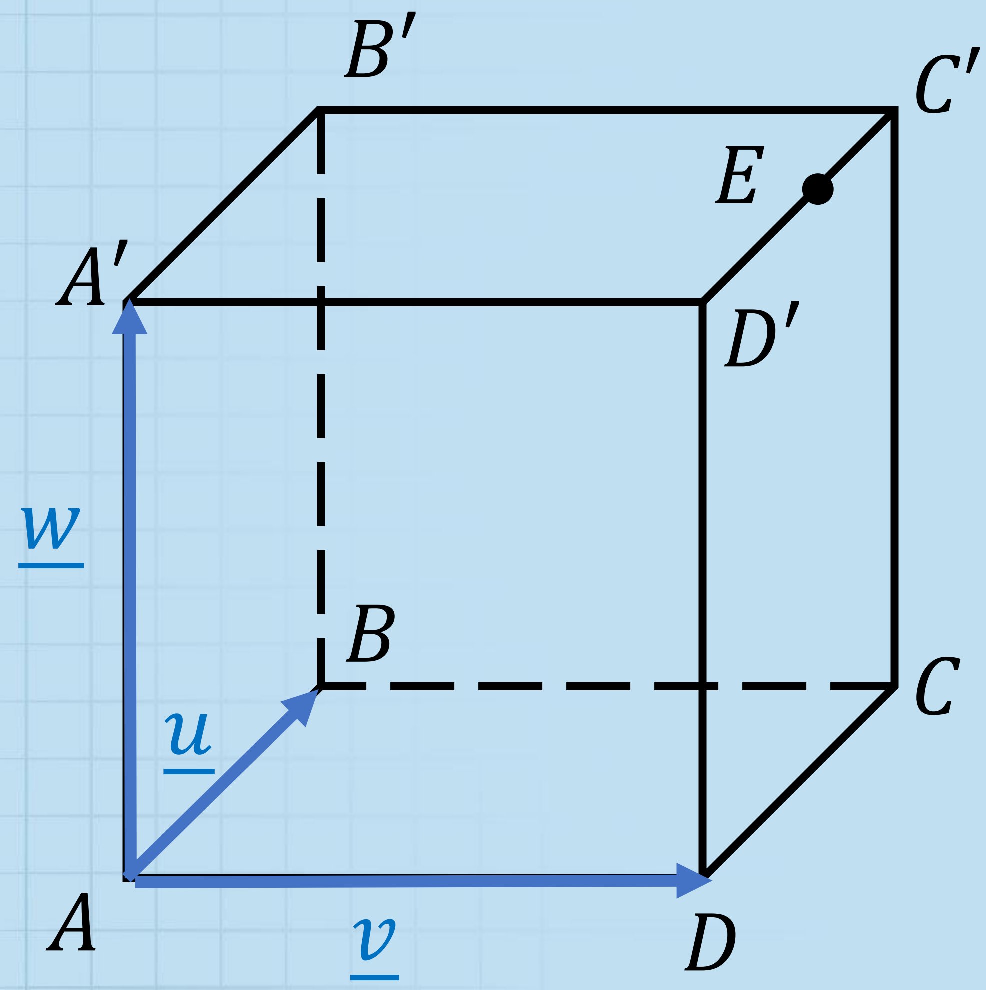


$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'E} = \underline{w} - (1-t)\underline{u}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{CE} = \underline{w} + (t-1)\underline{u}}$$

ג. הבע את $\overrightarrow{CE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t והראה שלא קיים t עבורו $\sphericalangle AEC = 90^{\circ}$.

פתרון



$$\cos \sphericalangle AEC = \frac{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EA}| \cdot |\overrightarrow{EC}|}$$

נראה כי לכל t מתקיים:

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} \neq 0$$

ג. הבע את $\overrightarrow{CE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t והראה שלא קיים t עבורו $\sphericalangle AEC = 90^\circ$.

פתרון

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = -(t\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) \cdot -((t-1)\underline{u} + \underline{w})$$

$$= t(t-1)|\underline{u}|^2 + |\underline{w}|^2 = t(t-1) + 1 = \mathbf{t^2 - t + 1}$$

ג. הבע את $\overrightarrow{CE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t והראה שלא קיים t עבורו $\measuredangle AEC = 90^\circ$.

פתרון

הביטוי $t^2 - t + 1$ חיובי לכל t ממשי:

$$a > 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$$

לא קיים t עבורו: $\measuredangle AEC = 90^\circ$

בהצלחה