פתרון תרגיל

חישובים במרחב בעזרת המכפלה הסקלרית (הווקטור הגיאומטרי)

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 361, ת. 11

השאלה

11) נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שהבסיסים שלה הם משולשים שווי צלעות.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$. הנקודה M היא אמצע $A'B'$

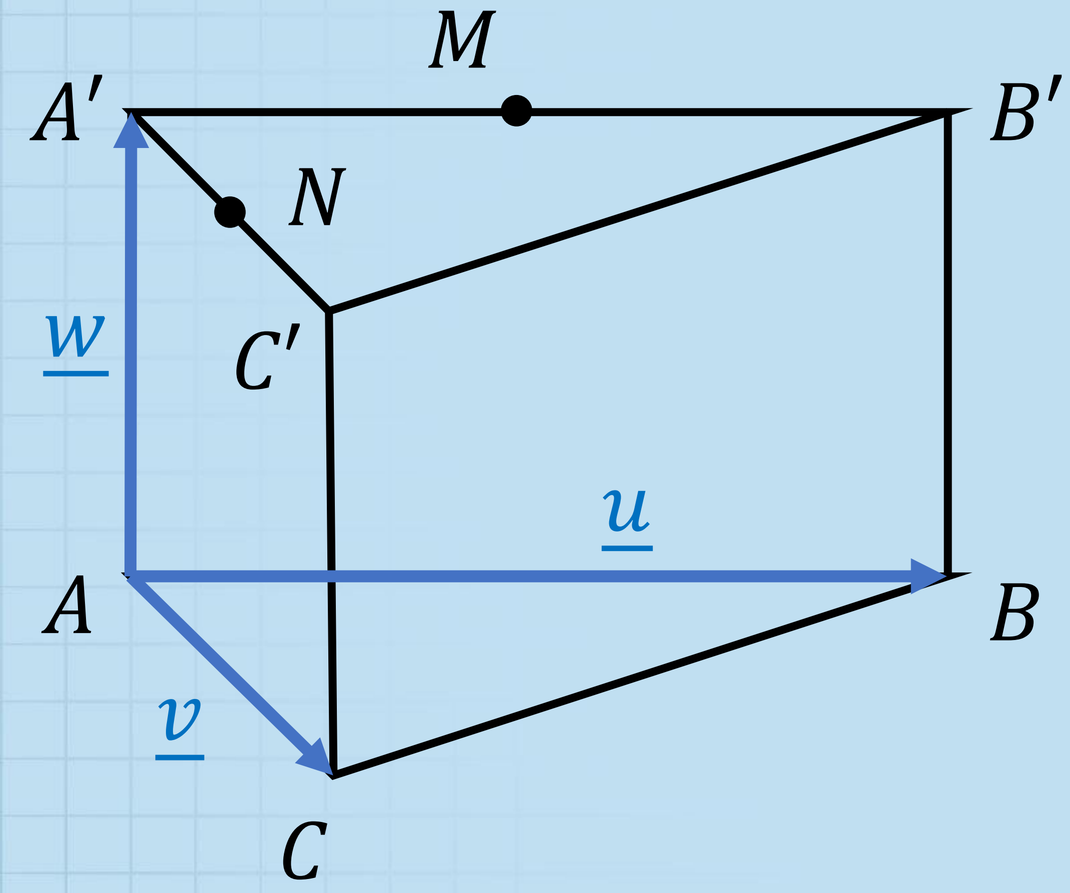
והנקודה N היא אמצע $A'C'$.

א. הבע את $\overrightarrow{AM}$ ואת $\overrightarrow{AN}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-$\underline{w}$.

ב. חשב את הזווית MAN אם נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.

א. הבע את $\overrightarrow{AM}$ ואת $\overrightarrow{AN}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

פתרון



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M}$$

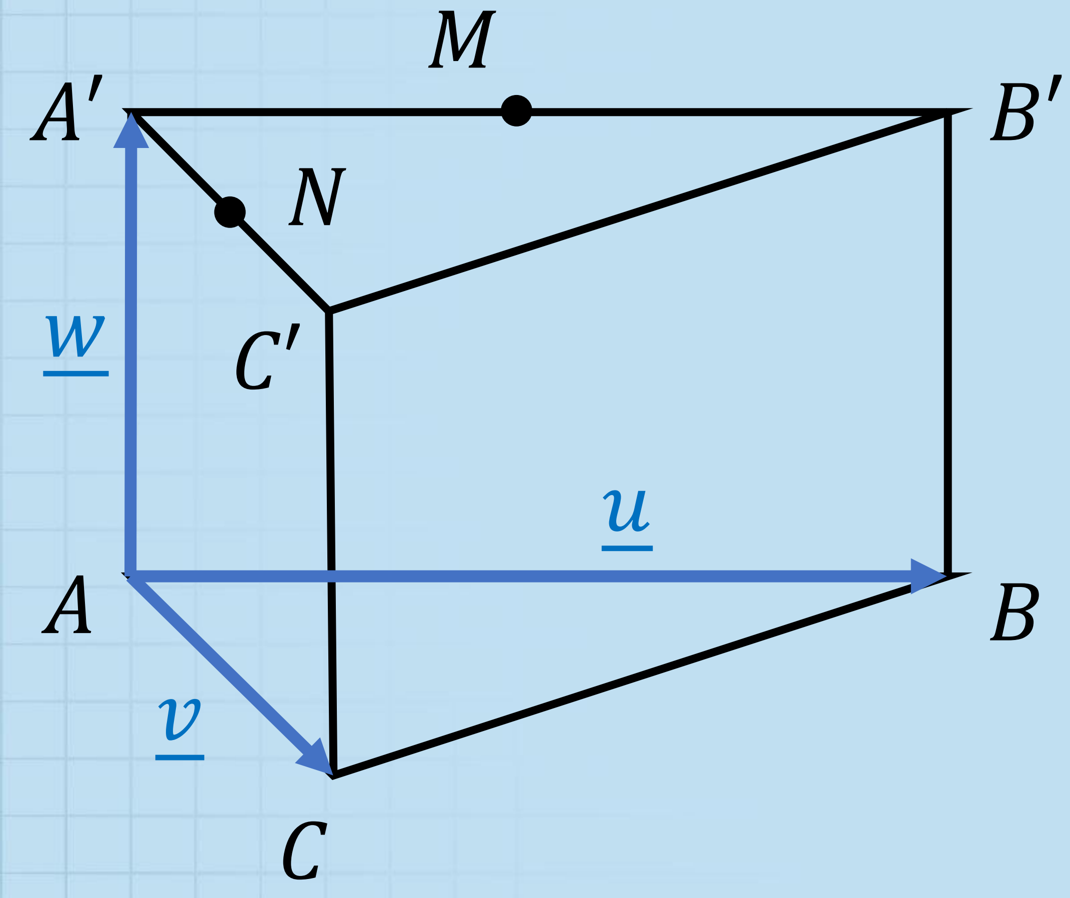
$$= \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'N}$$

$$= \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v}$$

ב. חשב את הזווית MAN אם נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.

פתרון



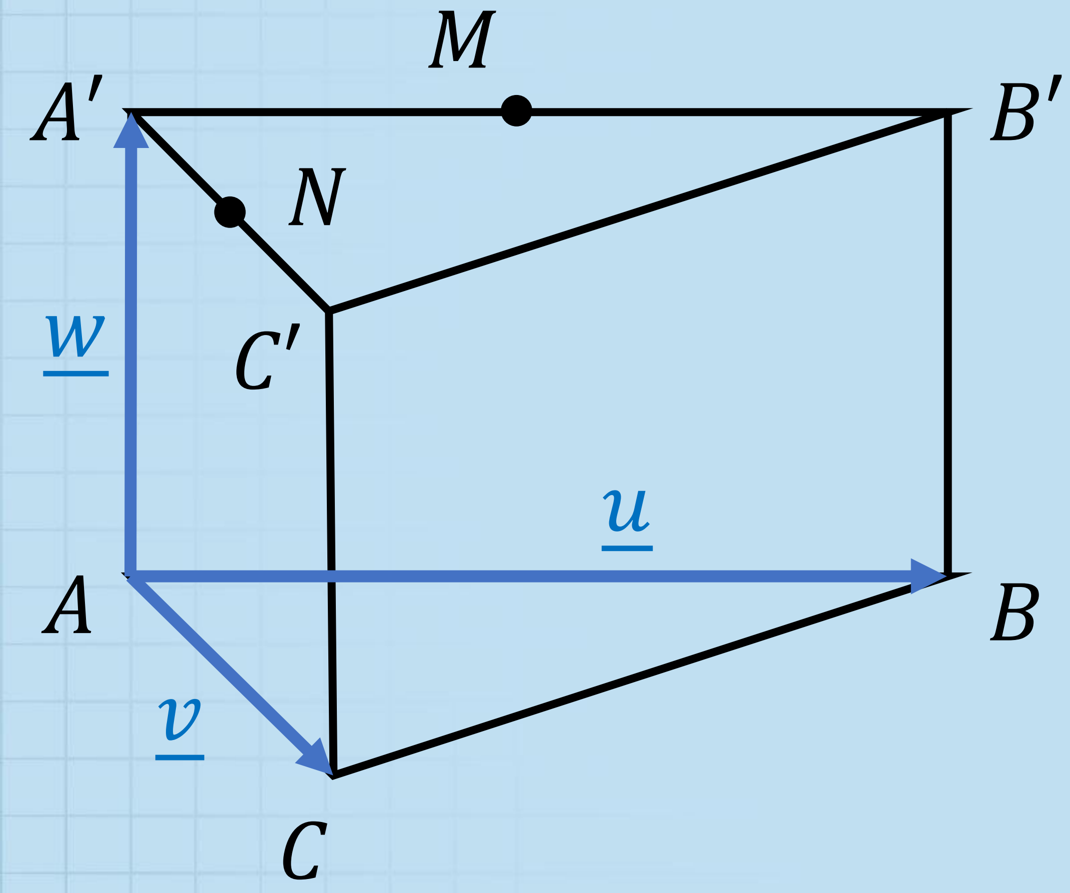
$$\cos \measuredangle MAN = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AN}|}$$

נתון מנסרה ישרה:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{u} \perp \underline{w} \\ \underline{v} \perp \underline{w} \end{array}\right\} \quad \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

ב. חשב את הזווית MAN אם נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.

פתרון



נתון שבסיס המנסרה משו"צ:

הזווית בין $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שווה $60°$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}$$

ב. חשב את הזווית MAN אם נתון: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}| = 1$.

פתרון

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \left(\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u}\right) \cdot \left(\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v}\right)$$

$$= |\underline{w}|^2 + \frac{1}{4}\underline{u} \cdot \underline{v} = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{9}{8}}$$

ב. חשב את הזווית MAN אם נתון: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}| = 1$.

פתרון

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\left(\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u}\right) \cdot \left(\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u}\right)}$$

$$= \sqrt{|\underline{w}|^2 + \frac{1}{4}|\underline{u}|^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ב. חשב את הזווית MAN אם נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.

פתרון

$$|\overrightarrow{AN}| = \sqrt{\left(\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v}\right) \cdot \left(\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v}\right)}$$

$$= \sqrt{|\underline{w}|^2 + \frac{1}{4}|\underline{v}|^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ב. חשב את הזווית MAN אם נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.

פתרון

$$\cos \sphericalangle MAN = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AN}|} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{9}{10}$$

$$\sphericalangle \boldsymbol{MAN} = \mathbf{25.84°}$$

בהצלחה