פתרון תרגיל

סדרות – תרגילים לחזרה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–1

581 , עמ' 214, ת. 43

השאלה

סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י כלל הנסיגה:
$$\begin{cases} a_1 = \frac{6}{5} \\ a_{n+1} = \frac{5a_n-4}{4a_n-3} \end{cases}.$$

מגדירים סדרה נוספת ע"י הכלל $b_n = \frac{1}{a_n-1}$ לכל n טבעי.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הנוסחה לאיבר הכללי שלה.

ב. נתון שהאיבר הכללי של הסדרה a_n הוא $a_n = \frac{1}{b_n}+1$. רשום את הנוסחה ל-a_n.

ג. הראה שהסדרה a_n יורדת לכל n טבעי.

ד. מצא את ה-n הקטן ביותר עבורו מתקיים: $a_n < 1.008$.

ה. הוכח שלכל n טבעי מתקיים: $1 < a_n \leq \frac{6}{5}$.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{6}{5} \\ a_{n+1} = \frac{5a_n-4}{4a_n-3} \end{cases}$$

מגדירים סדרה נוספת ע"י הכלל $b_n = \frac{1}{a_n-1}$ לכל n טבעי.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הנוסחה לאיבר הכללי שלה.

פתרון

בסדרה חשבונית ההפרש בין כל איבר לקודמו, פרט לאיבר הראשון, קבוע

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{\frac{5a_n - 4}{4a_n - 3} - 1} - \frac{1}{a_n - 1}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{6}{5} \\ a_{n+1} = \frac{5a_n-4}{4a_n-3} \end{cases}$$

מגדירים סדרה נוספת ע״י הכלל $b_n = \frac{1}{a_n-1}$ לכל n טבעי.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הנוסחה לאיבר הכללי שלה.

פתרון

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{\frac{5a_n-4}{4a_n-3} - 1} - \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{\frac{5a_n - 4 - 4a_n + 3}{4a_n - 3}} - \frac{1}{a_n - 1}$$

$$= \frac{4a_n - 3}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n - 1} = \frac{4a_n - 4}{a_n - 1} = \mathbf{4}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{6}{5} \\ a_{n+1} = \frac{5a_n-4}{4a_n-3} \end{cases}$$

מגדירים סדרה נוספת ע"י הכלל $b_n = \frac{1}{a_n-1}$ לכל n טבעי.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הנוסחה לאיבר הכללי שלה.

פתרון

הסדרה b_n חשבונית והפרשה $d = 4$

עפ"י איבר כללי בסדרה חשבונית:

$$b_n = b_1 + (n-1)d$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1 - 1} = \frac{1}{\frac{6}{5} - 1} = 5$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{6}{5} \\ a_{n+1} = \frac{5a_n - 4}{4a_n - 3} \end{cases}$$

מגדירים סדרה נוספת ע״י הכלל $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$ לכל n טבעי.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הנוסחה לאיבר הכללי שלה.

פתרון

$$\Downarrow$$

$$b_n = 5 + (n-1)4$$

$$\boldsymbol{b_n = 4n + 1}$$

ב. נתון שהאיבר הכללי של הסדרה a_n הוא $a_n = \frac{1}{b_n} + 1$. רשום את הנוסחה ל-a_n.

פתרון

עפ״י סעיף א׳: $b_n = 4n + 1$

$$\Downarrow$$

$$a_n = \frac{1}{4n+1} + 1$$

ג. הראה שהסדרה a_n יורדת לכל n טבעי.

פתרון

צ.ל. $a_{n+1} > a_n$ לכל n טבעי

$$a_n > a_{n+1}$$

$$\frac{1}{4n+1}+1 > \frac{1}{4(n+1)+1}+1$$

ג. הראה שהסדרה a_n יורדת לכל n טבעי.

פתרון

$$\frac{1}{4n+1} > \frac{1}{4n+5}$$

שני הביטויים במכנה חיוביים לכל n טבעי

$$4n+5 > 4n+1$$

$5 > 1$ פסוק אמת

הסדרה a_n יורדת לכל n טבעי

ד. מצא את ה-n הקטן ביותר עבורו מתקיים: $a_n < 1.008$.

פתרון

נדרוש: $a_n < 1.008$

$$\frac{1}{4n+1}+1<1.008$$

$$\frac{1}{4n+1}<0.008$$

המכנה חיובי לכל n טבעי

ד. מצא את ה-n הקטן ביותר עבורו מתקיים: $a_n < 1.008$.

פתרון

$$1 < (4n + 1)0.008$$

$$1 < 0.032n + 0.008$$

$$\mathbf{31 < n}$$

ד. מצא את ה-n הקטן ביותר עבורו מתקיים: $a_n < 1.008$.

פתרון

הדרישה מתקיימת לכל $n > 31$

n מספר טבעי, $n \geq 32$

ה. הוכח שלכל n טבעי מתקיים: $1 < a_n \leq \frac{6}{5}$.

פתרון

עפ"י סעיף ג' הסדרה a_n יורדת לכל n טבעי

$\Downarrow$

הערך **הגדול** ביותר עבור איבר בסדרה הוא $a_1 = \frac{6}{5}$

$\Downarrow$

$a_n \leq \frac{6}{5}$ לכל n טבעי

ה. הוכח שלכל n טבעי מתקיים: $1 < a_n \le \frac{6}{5}$.

פתרון

$$a_n = \frac{1}{4n+1} + 1$$

המכנה של המחובר הראשון חיובי לכל n טבעי

$\Downarrow$

$a_n > 1$ לכל n טבעי

ה. הוכח שלכל n טבעי מתקיים: $1 < a_n \le \frac{6}{5}$.

פתרון

$\Downarrow$

$1 < a_n \le \frac{6}{5}$ לכל n טבעי

בהצלחה