פתרון תרגיל

סדרות – תרגילים לחזרה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–1

581 , עמ' 214, ת. 42

המצגת נערכה ע"י **שירי דוברין**

השאלה

נתונה הסדרה $\frac{1}{2\cdot3}, \frac{1}{3\cdot4}, \frac{1}{4\cdot5}, \dots$. המכנה של האיבר הכללי הוא מכפלה של איבר מסדרה חשבונית אחת ואיבר מסדרה חשבונית שנייה.

א. מצא את הנוסחה לאיבר הכללי (a_n).

ב. מצא את הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים (S_n).

ג. נתון שהאיבר האחרון בסדרה הוא $\frac{1}{420}$. מצא את סכום הסדרה.

נתונה הסדרה $\frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots$. המכנה של האיבר הכללי הוא מכפלה של איבר מסדרה חשבונית אחת ואיבר מסדרה חשבונית שנייה.

א. מצא את הנוסחה לאיבר הכללי (a_n).

פתרון

הסדרה החשבונית במכנה (1):

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)1 = n + 1$$

נתונה הסדרה $\ldots, \frac{1}{4\cdot5}, \frac{1}{3\cdot4}, \frac{1}{2\cdot3}$. המכנה של האיבר הכללי הוא מכפלה של איבר מסדרה חשבונית אחת ואיבר מסדרה חשבונית שנייה.

א. מצא את הנוסחה לאיבר הכללי (a_n).

פתרון

הסדרה החשבונית במכנה (2) :

$3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)1 = n + 2$$

נתונה הסדרה $\ldots, \frac{1}{4\cdot 5}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{2\cdot 3}$. המכנה של האיבר הכללי הוא מכפלה של איבר מסדרה חשבונית אחת ואיבר מסדרה חשבונית שנייה.

א. מצא את הנוסחה לאיבר הכללי (a_n).

פתרון

האיבר הכללי של הסדרה:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ב. מצא את הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים (S_n).

פתרון

האיבר הכללי של הסדרה:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n+1}+\frac{b}{n+2}$$

ב. מצא את הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים (S_n).

פתרון

$$1 = a(n+2) + b(n+1)$$

הביטוי נכון לכל n טבעי ובפרט עבור $n = 1,2$

$n = 2:$

$$1 = 4a + 3b \quad /\cdot 3$$

$n = 1:$

$$1 = 3a + 2b \quad /\cdot 4$$

ב. מצא את הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים (S_n).

פתרון

$$4 = 12a + 8b$$

$$3 = 12a + 9b$$

נחסר בין המשוואות :

$$\boldsymbol{b = -1} \quad \Rightarrow \quad 1 = 3a + 2(-1)$$

$$\boldsymbol{a = 1}$$

ב. מצא את הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים (S_n).

פתרון

האיבר הכללי של הסדרה:

$$\frac{a}{n+1}+\frac{b}{n+2}=\frac{1}{n+1}+\frac{-1}{n+2}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

ב. מצא את הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים (S_n).

פתרון

הסדרה בפירוק לשברים חלקיים:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right), \quad \dots, \quad \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

ג. נתון שהאיבר האחרון בסדרה הוא $\frac{1}{420}$. מצא את סכום הסדרה.

פתרון

נמצא את כמות האיברים בסדרה:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{420}$$

$$420 = n^2 + 3n + 2$$

$$n^2 + 3n - 418 = 0$$

ג. נתון שהאיבר האחרון בסדרה הוא $\frac{1}{420}$. מצא את סכום הסדרה.

פתרון

באמצעות נוסחת השורשים:

$n = 19$ $n = -22$

n מספר טבעי, $n = 19$

ג. נתון שהאיבר האחרון בסדרה הוא $\frac{1}{420}$. מצא את סכום הסדרה.

פתרון

$\Downarrow$

$$S_{19} = \frac{1}{2} - \frac{1}{19+2} = \mathbf{\frac{19}{42}}$$

בהצלחה