פתרון תרגיל

סדרות – תרגילים לחזרה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–1

581 , עמ' 211, ת. 28

המצגת נערכה ע"י **שירי דוברין**

השאלה

הסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא q.

בונים סדרה שהאיברים שלה הם: $b_1 = a_2 - a_1\ ,\ b_2 = a_3 - a_2\ ,\ b_3 = a_4 - a_3\ ,\ \ldots$.

א. הראה שהסדרה $b_1, b_2, b_3, \ldots$ היא סדרה הנדסית.

ב. היעזר בנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית והבע באמצעות a_1, q ו-n את סכום n האיברים הראשונים של הסדרה $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

ג. הסבר כיצד ניתן לקבל את התוצאה של סעיף ב׳ גם ללא הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית.

ד. נסמן: $k = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots}$. מצא באיזה תחום צריך להיות k כדי ששתי הסדרות תהיינה סדרות אינסופיות מתכנסות.

הסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא q.
בונים סדרה שהאיברים שלה הם: $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2$, $b_3 = a_4 - a_3$, ...
א. הראה שהסדרה $b_1, b_2, b_3, \ldots$ היא סדרה הנדסית.

פתרון

נתון שהסדרה a_n הנדסית:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad a_1 \neq 0$$

נגדיר את הסדרה b_n באמצעות הסדרה a_n:

$$b_n = a_{n+1} - a_n = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1}(q-1)$$

הסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא q.
בונים סדרה שהאיברים שלה הם: $b_1 = a_2 - a_1 \, , \, b_2 = a_3 - a_2 \, , \, b_3 = a_4 - a_3 \, , \, \ldots$.
א. הראה שהסדרה $b_1, b_2, b_3, \ldots$ היא סדרה הנדסית.

פתרון

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_1 q^n (q-1)}{a_1 q^{n-1} (q-1)} = q$$

הסדרה b_n הנדסית שמנתה q

ב. היעזר בנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית והבע באמצעות a_1, q ו-n את סכום n האיברים הראשונים של הסדרה $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

פתרון

עפ״י סכום סדרה הנדסית:

$$S_{b_n} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$b_1 = a_1 q^{1-1}(q-1) = a_1\,(q-1)$$

ב. היעזר בנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית והבע באמצעות a_1, q ו-n את סכום n האיברים הראשונים של הסדרה $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

פתרון

$$\Downarrow$$

$$S_{b_n} = \frac{a_1\,(q-1)(q^n-1)}{q-1} = \boldsymbol{a_1(q^n-1)}$$

ג. הסבר כיצד ניתן לקבל את התוצאה של סעיף ב' גם ללא הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית.

פתרון

עפ"י הגדרת סכום סדרה:

$$S_{b_n} = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$$

עפ"י הגדרת הסדרה b_n:

$$S_{b_n} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)$$

ג. הסבר כיצד ניתן לקבל את התוצאה של סעיף ב׳ גם ללא הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית.

פתרון

$$S_{b_n} = a_{n+1} - a_1 \quad = a_1 q^n - a_1 = \boldsymbol{a_1(q^n - 1)}$$

ד. נסמן: $k = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$. מצא באיזה תחום צריך להיות k כדי ששתי הסדרות תהיינה סדרות אינסופיות מתכנסות.

פתרון

לשתי הסדרות אותה מנה, q.

על מנת ששתי הסדרות יהיו אינסופיות מתכנסות, עלינו לדרוש q שבר פשוט.

נבטא את q באמצעות k ונדרוש: $0 \neq |q| < 1$

$$S_{a_\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_{b_\infty} = \frac{b_1}{1-q}$$

ד. נסמן: $k = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots}$. מצא באיזה תחום צריך להיות k כדי ששתי הסדרות תהיינה סדרות אינסופיות מתכנסות.

פתרון

$\Downarrow$

$$\frac{S_{a_\infty}}{S_{b_\infty}} = \frac{\frac{a_1}{1-q}}{\frac{b_1}{1-q}} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{a_2 - a_1} = \frac{a_1}{a_1 q - a_1} = \frac{1}{q-1}$$

ד. נסמן: $k = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots}$. מצא באיזה תחום צריך להיות k כדי ששתי הסדרות תהיינה סדרות אינסופיות מתכנסות.

פתרון

$$\frac{1}{q-1} = k \qquad /\div k \neq 0$$

$$\frac{1}{k} = q - 1$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{k} + 1 = q}$$

ד. נסמן: $k = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots}$. מצא באיזה תחום צריך להיות k כדי ששתי הסדרות תהיינה סדרות אינסופיות מתכנסות.

פתרון

נדרוש:

$$-1 < q < 1$$

$$-1 < \frac{1}{k} + 1 < 1$$

$$-2 < \frac{1}{k} < 0$$

ד. נסמן: $k = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$. מצא באיזה תחום צריך להיות k כדי ששתי הסדרות תהיינה סדרות אינסופיות מתכנסות.

פתרון

$$k < -\frac{1}{2}$$

ד. נסמן: $k = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$. מצא באיזה תחום צריך להיות k כדי ששתי הסדרות תהיינה סדרות אינסופיות מתכנסות.

פתרון

נדרוש:

$$q \neq 0$$

$$\frac{1}{k} + 1 \neq 0$$

$$\boldsymbol{k \neq -1}$$

ד. נסמן: $k = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots}$. מצא באיזה תחום צריך להיות k כדי ששתי הסדרות תהיינה סדרות אינסופיות מתכנסות.

פתרון

חיתוך בין כל הדרישות:

על מנת ששתי הסדרות יהיו אינסופיות מתכנסות נדרוש:

$$-1 \neq k < -\frac{1}{2}$$

בהצלחה