הקנייה

נקודות פיתול, קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה – פולינומים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 165–168

המצגת נערכה ע״י **שירי דוברין**

הקנייה

נקודות פיתול

משפט:

אם x_1 היא נקודת פיתול של פונקציה $f(x)$ ולפונקציה יש נגזרת שנייה בנקודה x_1 אז $f''(x_1) = 0$.

הוכחה: (ההוכחה מתייחסת לאפשרות אחת, אבל היא נכונה גם לאפשרות השנייה)
אם נניח ש-x_1 היא נקודת פיתול שבה הפונקציה עוברת מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה אז משמאל ל-x_1 מתקיים $f''(x) < 0$ (לפי המשפט הקודם) ואילו מימין ל-x_1 מתקיים $f''(x) > 0$, לכן בהכרח מתקיים $f''(x_1) = 0$.

הקנייה

הערות:

א) משפט זה עדיין לא מאפשר לנו למצוא נקודות פיתול אבל הוא מבטיח לנו שאם $f''(x_1) \neq 0$ אז ב-x_1 אין נקודת פיתול. (כפי שראינו, טענה דומה קיימת לגבי נקודות קיצון. אם $f'(x_1) \neq 0$ אז אין ב-x_1 נקודת קיצון).

לדוגמא – לפונקציה $f(x) = x^2$ אין נקודות פיתול כי $f''(x) = 2$. כלומר, הנגזרת השנייה שונה מ-0 לכל x.

הקנייה

ב) מצד שני, אם $f''(x_1) = 0$ אין זה אומר ש-x_1 היא נקודת פיתול.
לדוגמא – הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x) = x^4$ היא $f''(x) = 12x^2$. בנקודה $x = 0$ מתקיים $f''(0) = 0$ אבל בכל זאת הנקודה $x = 0$ היא לא נקודת פיתול אלא נקודת מינימום. (ראה דוגמא (2) בעמ' זה).

הקנייה

ג) נקודת קיצון פנימית לא יכולה להיות נקודת פיתול כי המשיק לגרף הפונקציה בנקודת קיצון פנימית **לא** עובר מצד אחד של הגרף לצידו השני. למעשה, אם זאת נקודת מינימום אז הפונקציה קעורה בה כלפי מעלה $\cup$ ואם זאת נקודת מקסימום אז הפונקציה קעורה בה כלפי מטה $\cap$. הערה זו נכונה רק **לפונקציות שבתוכנית הלימודים**.

הקנייה

משפט:

נתונה פונקציה $f(x)$ הגזירה n פעמים בנקודה x_1. אם כל $n-1$ הנגזרות הראשונות ב-x_1 שוות לאפס (כלומר $f'(x_1) = f''(x_1) = \dots = f^{(n-1)}(x_1) = 0$) ואילו הנגזרת ה-$n$ ב-x_1 שונה מאפס (כלומר $f^{(n)}(x_1) \neq 0$), אז אם n אי זוגי הנקודה x_1 היא נקודת פיתול ואם n זוגי הנקודה x_1 היא נקודת קיצון – מינימום אם $f^{(n)}(x_1) > 0$ ומקסימום אם $f^{(n)}(x_1) < 0$.

מהמשפט נקבל את המסקנה הבאה, המאפשרת למצוא נקודות פיתול (ראה גם הערה א'):

מסקנה מהמשפט – נתונה פונקציה $f(x)$ הגזירה שלוש פעמים בנקודה x_1. אם $f''(x_1) = 0$ ו-$f'''(x_1) \neq 0$ אז x_1 היא נקודת פיתול.

הקנייה

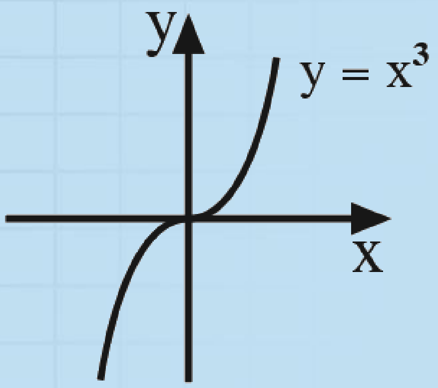
ניתן לקבוע אם נקודה היא נקודת פיתול גם ללא הנגזרת השלישית וזאת ע״י הצבת ערכים של נקודות, משני הצדדים של הנקודה, בנגזרת **השנייה**. (דבר דומה עשינו לגבי נקודת קיצון). הנקודות צריכות להיות בסביבה מספיק **קטנה שלא תכלול** נקודות אחרות שבהן הנגזרת **השנייה שווה לאפס.**

הקנייה

דוגמא (1) – הנגזרות הראשונות של הפונקציה

$f(x) = x^3$ הן: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$,

בנקודה $x = 0$ מתקיימים: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$,



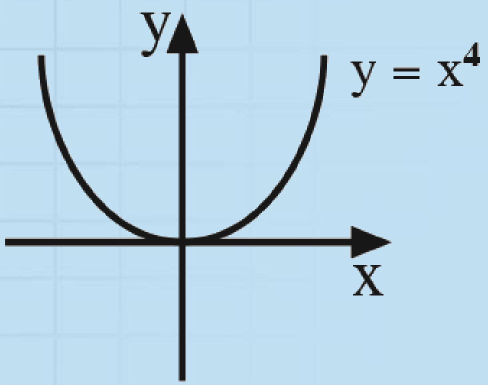
אם נציב $x = -1$ נקבל $f''(-1) = -6 < 0$, כלומר הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$.

אם נציב $x = 1$ נקבל $f''(1) = 6 > 0$, כלומר הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$.

מסקנה – בנקודה $x = 0$ יש לפונקציה $f(x) = x^3$ נקודת פיתול כי היא עוברת בה מקעירות כלפי מטה $\cap$ לקעירות כלפי מעלה $\cup$.

הקנייה

דוגמא (2) – הנגזרות הראשונות של הפונקציה
$f(x) = x^4$ הן: $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$,
בנקודה $x = 0$ מתקיים: $f'(0) = 0$,
$f''(0) = 0$,



אם נציב $x = -1$ נקבל $f''(-1) = 12 > 0$ וגם אם נציב $x = 1$
נקבל $f''(1) = 12 > 0$, כלומר משני הצדדים של הנקודה $x = 0$ הפונקציה קעורה
כלפי מעלה $\cup$ ולכן ב-$x = 0$ אין נקודת פיתול לפונקציה $f(x) = x^4$.

בהצלחה