פתרון תרגיל

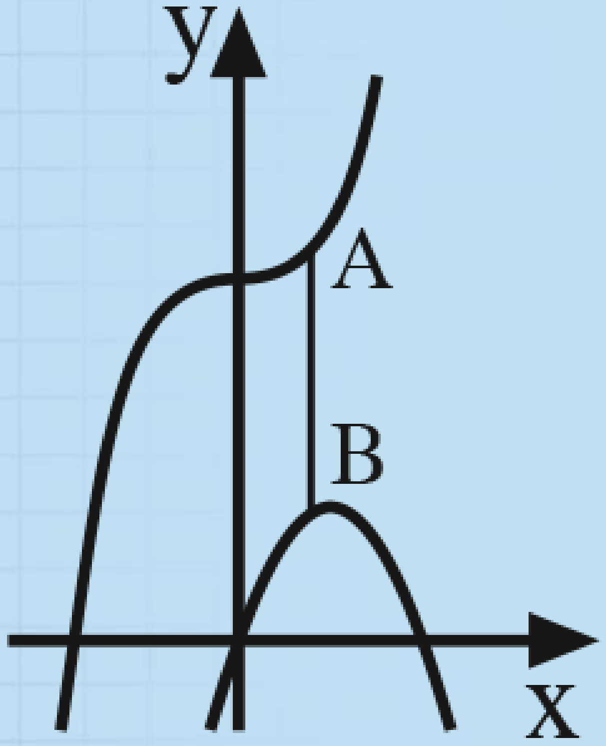
בעיות קיצון בפונקציות וגרפים
(אורכי קטעים המאונכים לציר ה – X)

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

581–481 , עמ' 779, ת. 22

המצגת נערכה ע"י טל מדר

השאלה



22) נתונים הגרפים של שתי הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{3}x^3+6$

ו-$g(x) = -x^2+3x$. ישר המקביל לציר ה-y חותך את

שני הגרפים בהתאמה בנקודות A ו-B ברביע הראשון.

א. מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את

האורך המינימלי של הקטע AB.

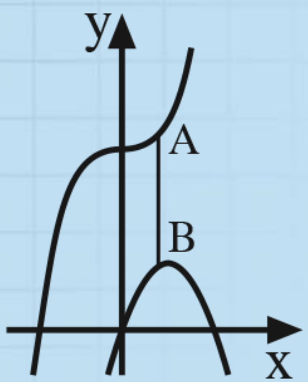
ב. הראה שכאשר הקטע AB הוא בעל אורך מינימלי

אז המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A מקביל

למשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

א. מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון



א. פוני' המטרה שלנו היא אורך הקטע AB ולכן $y = AB$ אורך $= y_A - y_B$

נסמן $A(x, \frac{1}{3}x^3 + 6)$ והרי שיעור ה-x של נקודה B זהה לזה של נקודה A ולכן $B(x, -x^2 + 3x)$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 6 - (-x^2 + 3x)$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 6$$

$$y' = x^2 + 2x - 3$$

$$0 = x^2 + 2x - 3$$

$x = -3$ $\quad$ $x = 1$

לא ייתכן כי ברביע הראשון

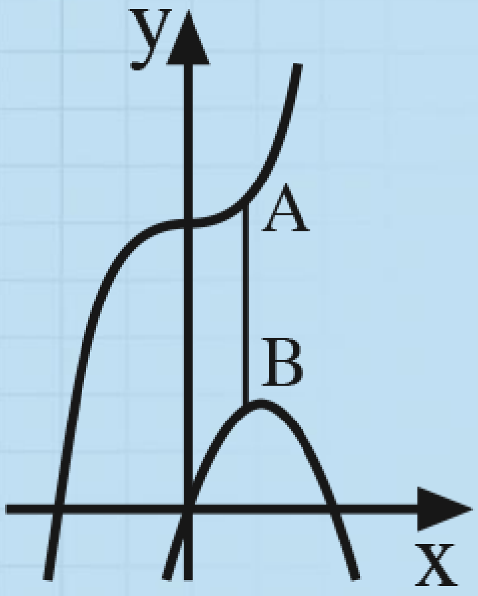
$$y'' = 2x + 2$$

מינימום $y''(1) = 4 > 0$

והאורך המינימלי יתקבל ע"י הצבת x=1 בפונק' המטרה ונקבל $AB = 4\frac{1}{3}$

ב. הראה שכאשר הקטע AB הוא בעל אורך מינימלי
אז המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A מקביל
למשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

פתרון



ב. כדי להראות שהמשיקים מקבילים נראה כי יש את אותו שיפוע, כלומר:

$$f'(1) = g'(1)$$

$$g'(x) = -2x + 3 \qquad f'(x) = x^2$$

$$g'(1) = 1 \qquad f'(1) = 1$$

מקבילים

בהצלחה