הקנייה

סיווג נקודות הקיצון בעזרת הנגזרת השנייה

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

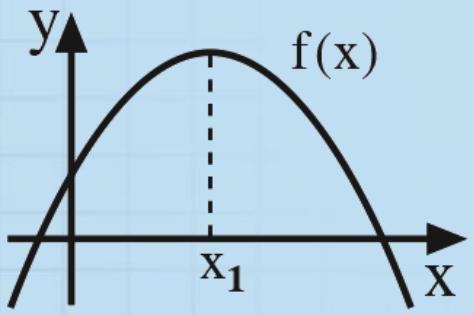
481–581 , עמ' 700

המצגת נערכה ע"י דנה עידן
כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

הקנייה

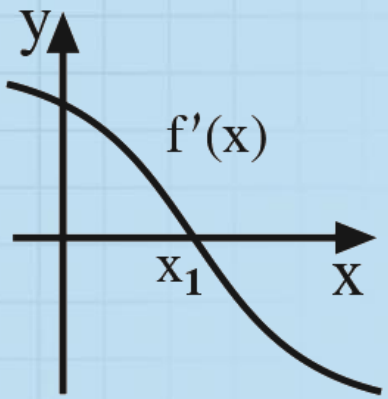
סיווג נקודות קיצון בעזרת הנגזרת השנייה

כפי שראינו בדוגמא האחרונה ובהערה ג׳ שאחרי הדוגמא, ניתן למצוא אם הנקודה היא נקודת קיצון ע״י חישוב ערכי הפונקציה או ע״י חישוב ערכי הפונקציה הנגזרת משני צידי הנקודה. כדי להימנע מחישובים כאלה ניתן להיעזר ב**נגזרת השנייה** של הפונקציה. נסביר זאת.



נסתכל בפונקציה $f(x)$ שבציור: יש לה נקודת מקסימום ב-x_1 ולכן $f'(x_1) = 0$. כמו כן הפונקציה $f(x)$ **עולה** עבור $x < x_1$ ולכן בתחום זה **השיפוע חיובי** ז״א הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ **חיובית**. באותו אופן עבור $x > x_1$ הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ **שלילית** כי הפונקציה $f(x)$ **יורדת** בתחום זה.

הקנייה



התיאור הגרפי של הנגזרת $f'(x)$ ייראה בערך כמו בציור משמאל. (הגרף חותך את ציר ה-x בנקודה x_1 כי $f'(x_1) = 0$). כלומר הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ **יורדת לכל** x ולכן בנקודה x_1 **הנגזרת של הפונקציה הנגזרת** היא **שלילית**, כלומר $f''(x_1) < 0$. באופן דומה אם x_1 היא נקודת מינימום אז $f'(x_1) = 0$ וכן $f''(x_1) > 0$.

נוכל לסכם זאת במשפט.

משפט:

תהי $f(x)$ פונקציה שגזירה פעמיים בנקודה x_1. אם בנקודה x_1 מתקיים $f'(x_1) = 0$ ו-$f''(x_1) \neq 0$ אז ל-$f(x)$ יש ערך קיצון בנקודה x_1. ערך זה הוא מינימום (מקומי) אם $f''(x_1) > 0$ והוא מקסימום (מקומי) אם $f''(x_1) < 0$.

הקנייה

הערה:

אם הנגזרת השנייה שווה ל-0, כלומר $f''(x_1) = 0$ (וגם $f'(x_1) = 0$), אין אפשרות לדעת לפי המשפט אם זו נקודת קיצון ואם כן אם היא נקודת מינימום או מקסימום.

במקרה כזה ניתן לחשב את ערכי הפונקציה בסביבה של x_1 כפי שכבר עשינו בדוגמא א׳ או לחשב את ערכי הפונקציה הנגזרת בסביבה של x_1, כפי שמוסבר בדוגמא שבהערה ב׳ שבעמ׳ 715. עפ"י מה שכבר הערנו, **הסביבה צריכה להיות מספיק קטנה כדי שלא תכלול נקודות אחרות שבהן הנגזרת מתאפסת. סיכום השלבים** למציאת נקודות קיצון מופיע אחרי הדוגמא הבאה.

הקנייה

דוגמא ב':

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = x^3-6x^2+9x-2$.

פתרון:

נגזור ונשווה לאפס $f'(x) = 3x^2-12x+9 = 0$. המשוואה הריבועית המתקבלת היא $x^2-4x+3 = 0$ שהפתרונות שלה הם $x_1 = 1$ ו-$x_2 = 3$. נגזור פעם שנייה ונקבל $f''(x) = 6x-12$. נציב $x_1 = 1$ ונקבל $f''(1) = -6 < 0$, כלומר נקודת מקסימום. נציב $x_2 = 3$ ונקבל $f''(3) = 6 > 0$, כלומר נקודת מינימום. נחשב את ערכי y המתאימים $y_1 = f(1) = 2$ וכן $y_2 = f(3) = -2$. לסיכום, נקודת המקסימום היא $(1,2)$ ונקודת המינימום היא $(3,-2)$.

הקנייה

השלבים למציאת נקודות קיצון פנימיות של פונקציה

השלבים למציאת נקודות קיצון פנימיות של פונקציה:

א) גוזרים את הפונקציה פעם ראשונה ומשווים את הנגזרת לאפס.

ב) מוצאים את פתרונות המשוואה המתקבלת (שיעורי ה-x).

ג) גוזרים את הפונקציה פעם שנייה.

ד) מציבים את כל אחד מהפתרונות שהתקבלו בסעיף ב׳ בנגזרת השנייה. כל פתרון שעבורו הנגזרת השנייה חיובית הוא נקודת מינימום וכל פתרון שעבורו הנגזרת השנייה שלילית הוא נקודת מקסימום. (אם עבור פתרון כלשהו גם הנגזרת השנייה שווה לאפס אז צריך לפעול עפ״י המוסבר בהערה שלפני דוגמא ב׳).

ה) מציבים את כל אחד מהפתרונות שהתקבלו בסעיף ב׳ בפונקציה המקורית ומוצאים את שיעורי ה-y המתאימים.

בהצלחה