הקנייה

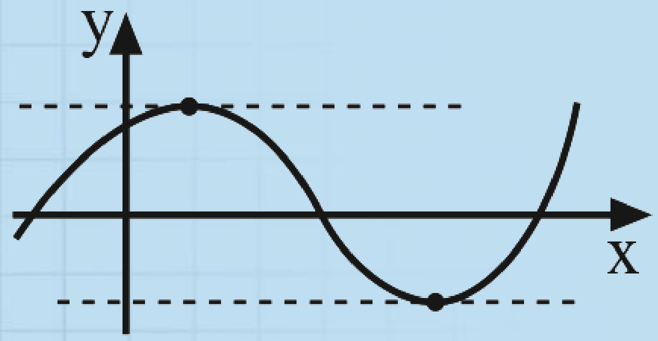
מציאת נקודות קיצון באמצעות הנגזרת – דוגמה א'

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 698– 700

מציאת נקודות קיצון באמצעות הנגזרת

בסעיף זה ההתייחסות לנקודות קיצון היא רק **לנקודות קיצון פנימיות** ולא לנקודות קיצון בקצוות, גם אם הדבר לא מצויין במפורש.



נתבונן בנקודות הקיצון של הפונקציה שבציור.
אם נעביר משיקים דרכן נראה שהם **מקבילים לציר ה-x**, כלומר שיפוע המשיק בנקודת קיצון הוא 0. נסכם זאת במשפט.

הקנייה

משפט:

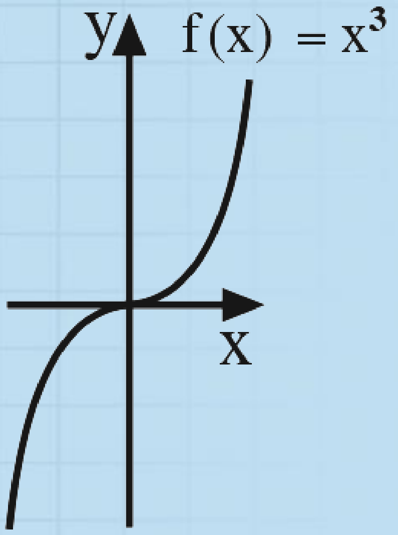
אם פונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה x_1 והנקודה x_1 היא נקודת קיצון אז $f'(x_1) = 0$.

כלומר: אם בנקודה מסויימת יש לפונקציה ערך **קיצון** אז ערך **הנגזרת** בנקודה זו הוא **אפס.**

הערות:

א) משפט זה עדיין לא מאפשר לנו למצוא נקודות קיצון אבל הוא מבטיח לנו שאם $f'(x_1) \neq 0$ אז **אין** ב-x_1 נקודת קיצון. **לדוגמא** לפונקציה $f(x) = x^3+x$ **אין** נקודות קיצון כי הנגזרת $f'(x_1) = 3x^2+1$ **שונה מ-0** לכל x.

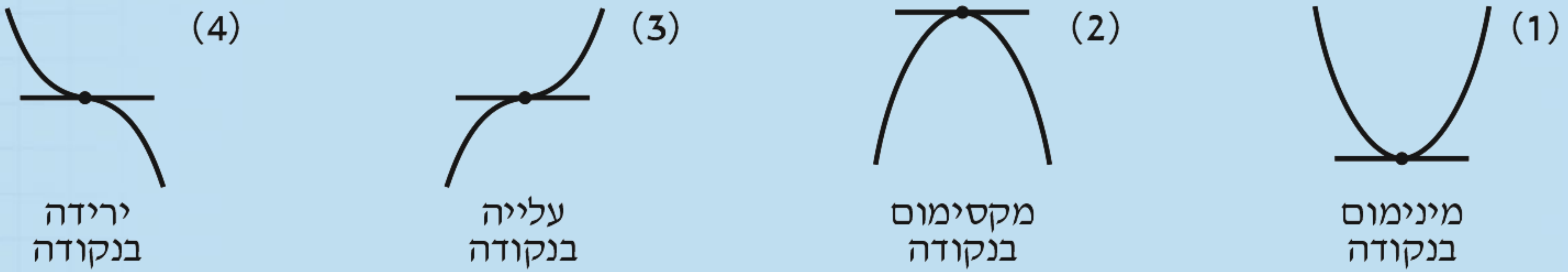
הקנייה



ב) יש לשים לב **שהמשפט ההפוך איננו נכון**, כלומר אם בנקודה x_1 מתקיים $f'(x_1) = 0$ אין זה אומר שלפונקציה יש ערך קיצון בנקודה זו. **לדוגמא** בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = x^3$, הנגזרת היא $f'(x) = 3x^2$ ובנקודה $x = 0$ מתקיים $f'(0) = 0$. למרות זאת אין לפונקציה מינימום או מקסימום ב-$x = 0$ כפי שרואים בציור. למעשה, הפונקציה $f(x) = x^3$ **עולה לכל x**.

הקנייה

ג) למעשה אם **נגזרת הפונקציה** בנקודה x_1 **שווה לאפס**, כלומר $f'(x_1) = 0$ אז **המשיק** בנקודה x_1 **מקביל לציר** ה-x **או מתלכד איתו.** לכן קיימת רק אחת **מהאפשרויות הבאות** לגבי הנקודה x_1:



מטרתנו העיקרית בהמשך היא למצוא אם בנקודה x_1 יש בכלל נקודת קיצון (אפשרויות (1) ו-(2)) ואם כן, אם היא נקודת מינימום (1) או נקודת מקסימום (2).

עוד נעיר, שבאפשרויות (3) ו-(4) הנקודה x_1 היא **נקודת פיתול שהמשיק בה מקביל לציר** ה-x. (ראה הערה ג' בעמ' 654 ואת הדוגמא בעמ' 710).

הקנייה

בשלב ראשון נדון רק בפונקציות שמתאימות לאפשרויות (1) ו-(2).

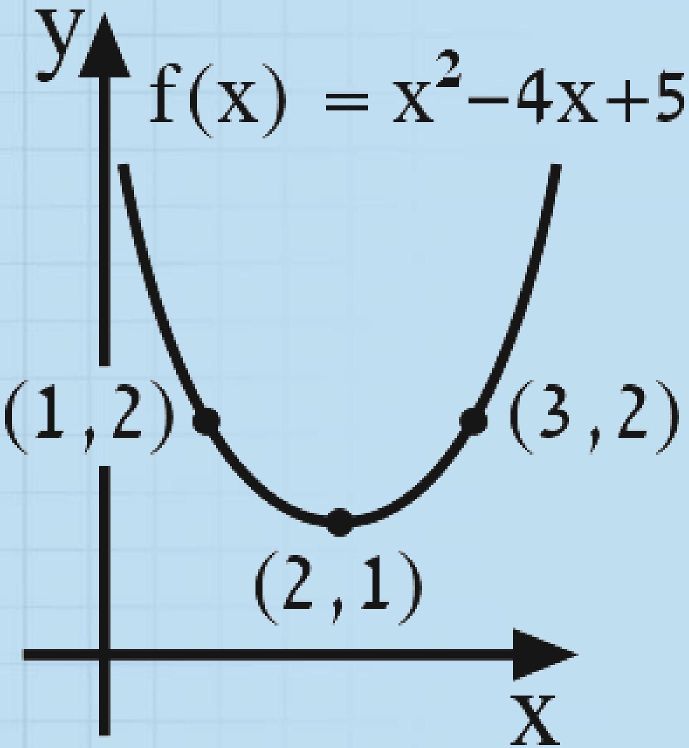
דוגמא א':

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = x^2-4x+5$.

פתרון:

נגזור את הפונקציה $f'(x) = 2x-4$. נשווה לאפס $2x-4 = 0$ ונקבל $x = 2$. עפ"י המשפט שניסחנו עדיין לא ברור אם בנקודה $x = 2$ יש לפונקציה נקודת קיצון ואם כן אם היא נקודת מינימום או מקסימום. יחד עם זאת, אם לפונקציה יש נקודת קיצון אז היא בהכרח בנקודה $x = 2$.

הקנייה



כדי לענות על בעיה זו נחשב את **ערכי הפונקציה** בנקודה $x = 2$ **ובשתי נקודות בסביבה** של $x = 2$ (משני הצדדים), נניח בנקודות $x = 1$ ו-$x = 3$. נקבל $f(2) = 1$, $f(1) = 2$ וכן $f(3) = 2$, כלומר משני הצדדים של $x = 2$ ערכי **הפונקציה גדולים מערכה ב-**$x = 2$. המסקנה: בנקודה $x = 2$ יש לפונקציה **מינימום**, המינימום הוא $f(2) = 1$.

הקנייה

הערות:

א) היות והפונקציה $y = x^2-4x+5$ היא פרבולה שבה המקדם של x^2 הוא חיובי ($a = 1$) אז יש לה מינימום בקודקוד (ראה עמ' 63). שיעור ה-x של הקודקוד הוא $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2} = 2$ ותוצאה זו מתאימה לתוצאה שקיבלנו בעזרת הנגזרת.

הקנייה

ב) כאשר רוצים לקבוע אם בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת יש לפונקציה נקודת קיצון ואת סוג הקיצון ע״י **הצבה בפונקציה**, כפי שעשינו בדוגמא א׳, אז צריך לשים לב **שהסביבה שכוללת את הנקודה שבה הנגזרת מתאפסת** (שמתוכה בוחרים את שני המספרים להצבה בפונקציה) **צריכה להיות מספיק קטנה כדי שלא תכלול נקודה או נקודות אחרות שבהן הנגזרת מתאפסת.**

לדוגמא: נניח שהפונקציה רציפה (ללא קפיצות) והנגזרת מתאפסת בנקודות $x = 2$ ו-$x = 3$. אם רוצים לקבוע אם בנקודה $x = 2$ יש לפונקציה נקודת קיצון ואת סוג הקיצון ע״י הצבה בפונקציה, אז כאשר מציבים בפונקציה מספר **הגדול מ-2** הוא **חייב להיות בין 2 ל-3**. הצבה של מספר הגדול מ-3 יכולה לגרום לטעות בזיהוי התנהגות הפונקציה בנקודה $x = 2$. לגבי המספר שקטן מ-2 אין למעשה הגבלה.

הקנייה

ג) דרך נוספת (פרט לדרך שנביא מייד) לקבוע אם נקודה, שבה הנגזרת מתאפסת, היא נקודת קיצון ואת סוג הקיצון ראה בהערה ב׳ שבעמ׳ 715. עפ״י ההערה שם, ההצבה היא **בנגזרת של הפונקציה** ולא בפונקציה עצמה. גם במקרה זה הסביבה צריכה להיות ״מספיק״ קטנה.

בהצלחה