פתרון תרגיל

זיהוי הפונקציה
ותכונותיה עפ"י הגרף

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

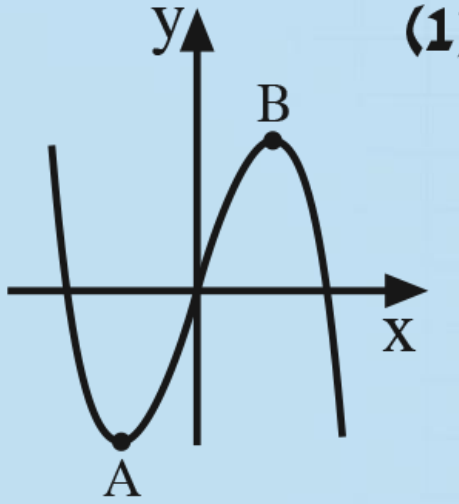
481–581 , עמ' 742, ת. 2

המצגת נערכה ע"י דנה עידן
כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

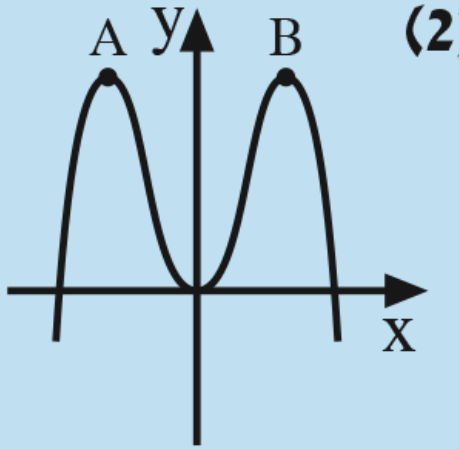
השאלה

2) נתונה הפונקציה $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ ונתונים שלושה גרפים שרק אחד מהם מתאר אותה:

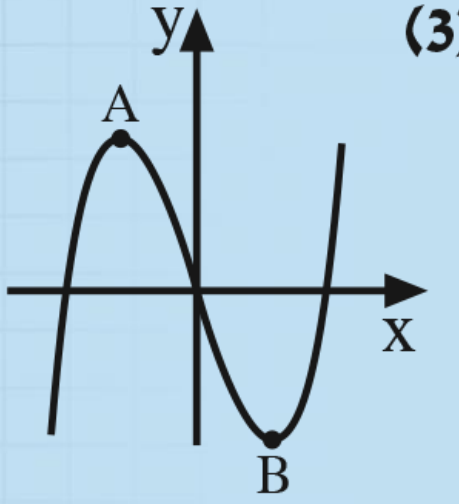
(1)



(2)



(3)



א. מצא את הגרף המתאר את הפונקציה.

ב. מצא בגרף המתאים לפונקציה את שיעורי הנקודות A ו-B.

ג. שני הגרפים הנותרים מתארים, לא בהכרח לפי הסדר, את הפונקציות $y = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$ ו-$y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$. חשב את שיעורי הנקודות A ו-B בשני הגרפים הנותרים.

א. מצא את הגרף המתאר את הפונקציה.

פתרון

סעיף א':

$$y = \frac{1}{4}x^3 - 3x$$

$$y' = \frac{3}{4}x^2 - 3$$

נראה שלשלוש הפונקציות יש אותן נקודות חיתוך עם הצירים, ולכן בלתי אפשרי להבדיל בין הגרפים באופן הזה.

לעומת זאת, הגרפים **שונים** זה מזה **בשיעורי נקודות הקיצון ו/או בסוגן**.

לכן נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הנתונה.

א. מצא את הגרף המתאר את הפונקציה.

פתרון

$$\frac{3}{4}x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

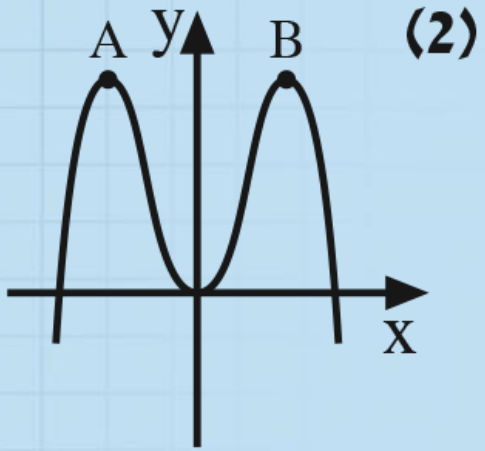
$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$$\mathbf{x = 2, \qquad x = -2}$$

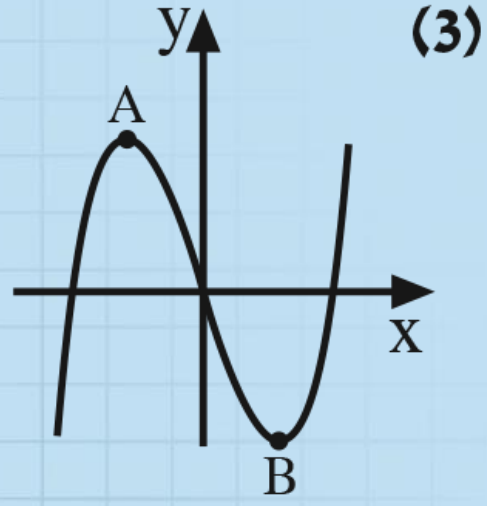
א. מצא את הגרף המתאר את הפונקציה.

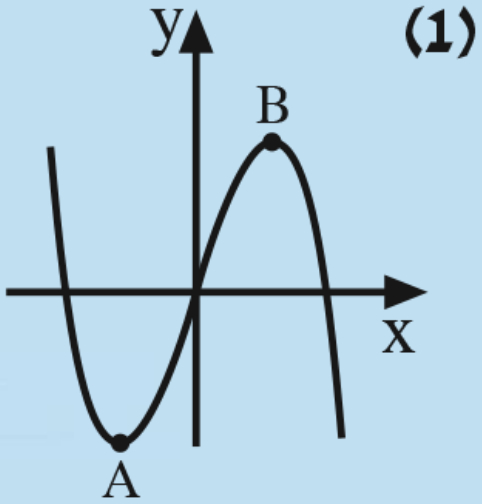
פתרון



מצאנו שלפונקציה יש שתי נקודות החשודות כקיצון.

נשים לב לכך שבגרף (2) יש שלוש נקודות קיצון, וזה בלתי אפשרי. לכן **גרף (2) נפסל**.





נתבונן בגרף (1) ובגרף (3), ונבדוק מה ההבדל ביניהם מבחינת נקודות הקיצון.

א. מצא את הגרף המתאר את הפונקציה.

פתרון

רואים שההבדל הוא **בסוג הקיצון**.

לכן נשתמש בנגזרת השנייה של משוואת הפונקציה שלנו.

$$y' = \frac{3}{4}x^2 - 3$$

$$y'' = \frac{3}{2}x$$

א. מצא את הגרף המתאר את הפונקציה.

פתרון

$$y''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 > 0 \longrightarrow$$ מינימום

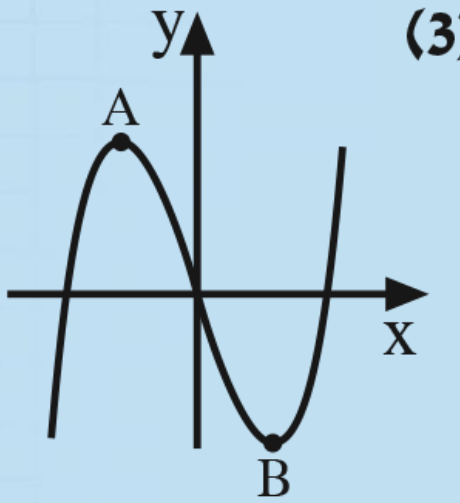
$$y''(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2) = -3 < 0 \longrightarrow$$ מקסימום

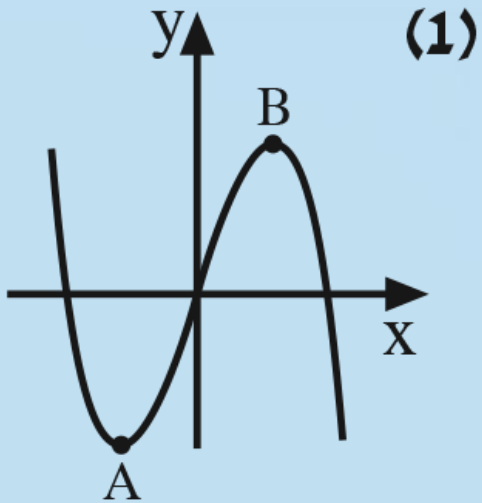
לכן נחפש גרף שבו **משמאל** לציר ה-y יש לפונקציה נקודת **מקסימום**, **ומימין**

לציר ה-y יש לה נקודת **מינימום**.

א. מצא את הגרף המתאר את הפונקציה.

פתרון



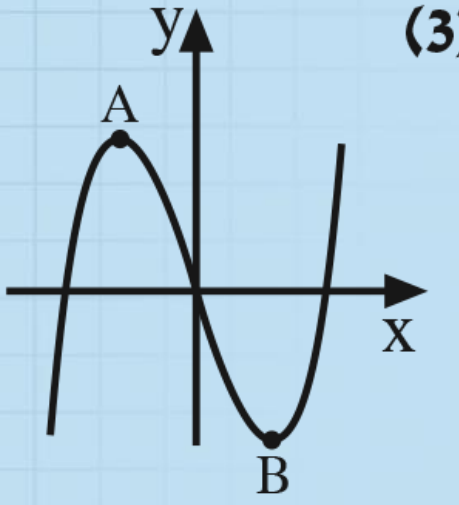


מסקנה: הגרף המתאים הוא גרף (3).

ב. מצא בגרף המתאים לפונקציה את שיעורי הנקודות A ו-B.

פתרון

(3)



סעיף ב':

יש למצוא את שיעורי הנקודות A ו-B.
רואים בגרף ש-A היא נקודת המקסימום, ו-B היא נקודת המינימום.

אנחנו כבר יודעים מהסעיף הקודם כי שיעור ה-x של הנקודה A הוא -2,
וששיעור ה-x של הנקודה B הוא 2.

נמצא את שיעורי ה- y המתאימים.

ב. מצא בגרף המתאים לפונקציה את שיעורי הנקודות A ו-B.

פתרון

$$y = \frac{1}{4}x^3 - 3x$$

$$x = 2 \rightarrow y = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 = -4$$

$$x = -2 \rightarrow y = \frac{1}{4} \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2) = 4$$

לכן:

$$\boxed{\begin{array}{l} A(-2,4) \\ B(2,-4) \end{array}}$$

ג. שני הגרפים הנותרים מתארים, לא בהכרח לפי הסדר, את הפונקציות $y = -\frac{1}{4}x^3+3x$ ו-$y = -\frac{1}{4}x^4+2x^2$. חשב את שיעורי הנקודות A ו-B בשני הגרפים הנותרים.

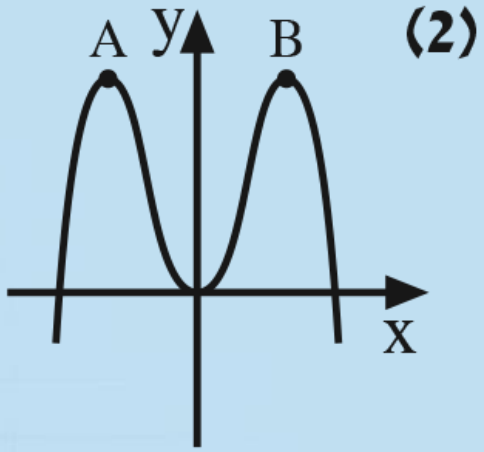
פתרון

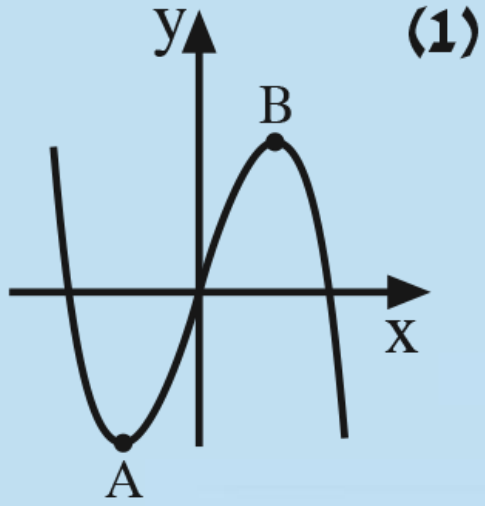
סעיף ג':

יש להתאים את הפונקציות: $y = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$

לגרף (1)

ולגרף (2).





ג. שני הגרפים הנותרים מתארים, לא בהכרח לפי הסדר, את הפונקציות $y = -\frac{1}{4}x^3+3x$ ו-$y = -\frac{1}{4}x^4+2x^2$. חשב את שיעורי הנקודות A ו-B בשני הגרפים הנותרים.

פתרון

בגרף (1) יש לפונקציה **שתי** נקודות קיצון, בעוד שבגרף (2) יש לפונקציה **שלוש** נקודות קיצון.

נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הראשונה: $y = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$

$$y' = -\frac{3}{4}x^2 + 3$$

$$-\frac{3}{4}x^2 + 3 = 0$$

ג. שני הגרפים הנותרים מתארים, לא בהכרח לפי הסדר, את הפונקציות $y = -\frac{1}{4}x^3+3x$ ו-$y = -\frac{1}{4}x^4+2x^2$. חשב את שיעורי הנקודות A ו-B בשני הגרפים הנותרים.

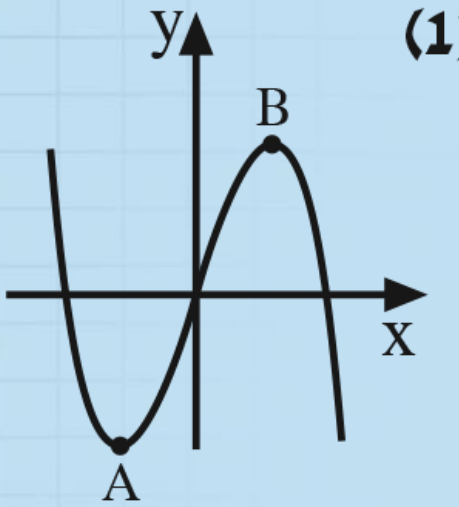
פתרון

אם נכפול את שני אגפי המשוואה ב- -1, נקבל: $\frac{3}{4}x^2 - 3 = 0$,
וזאת בדיוק המשוואה שפתרנו בסעיף א' כדי למצוא את נקודות הקיצון של הפונקציה שהייתה נתונה בסעיף א'.
לכן הפתרונות הם: $x = 2$ ו- $x = -2$.
לכן, **לא ייתכן** שלפונקציה הזאת יש שלוש נקודות קיצון.

מסקנה: הגרף המתאים לפונקציה $y = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$ הוא גרף (1).
לכן הפונקציה $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$ מתאימה לגרף (2).

ג. שני הגרפים הנותרים מתארים, לא בהכרח לפי הסדר, את הפונקציות $y = -\frac{1}{4}x^3+3x$ ו-$y = -\frac{1}{4}x^4+2x^2$. חשב את שיעורי הנקודות A ו-B בשני הגרפים הנותרים.

פתרון



נמצא את הנקודות A ו-B בגרף (1).

ידוע כי: $A(-2,\ ___)$ ו- $B(2,____)$

$$y = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$$

$$y = -\left(\frac{1}{4}x^3 - 3x\right)$$

לכן הסימנים של שיעורי ה-y של $x = 2$ ו-$x = -2$ יהיו <u>הפוכים</u> לסימנים של שיעורי ה-y של הפונקציה $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ מסעיפים א' ו-ב'.

ג. שני הגרפים הנותרים מתארים, לא בהכרח לפי הסדר, את הפונקציות $y = -\frac{1}{4}x^3+3x$
ו-$y = -\frac{1}{4}x^4+2x^2$. חשב את שיעורי הנקודות A ו-B בשני הגרפים הנותרים.

פתרון

בפונקציה הקודמת, שיעור ה-y המתאים ל-$x = -2$ היה 4.

לכן בפונקציה הנוכחית, שיעור ה-y המתאים ל-$x = -2$ הוא -4.

$$\boxed{A\ (-2, -4)}$$

בפונקציה הקודמת, שיעור ה-y המתאים ל-$x = 2$ היה -4.

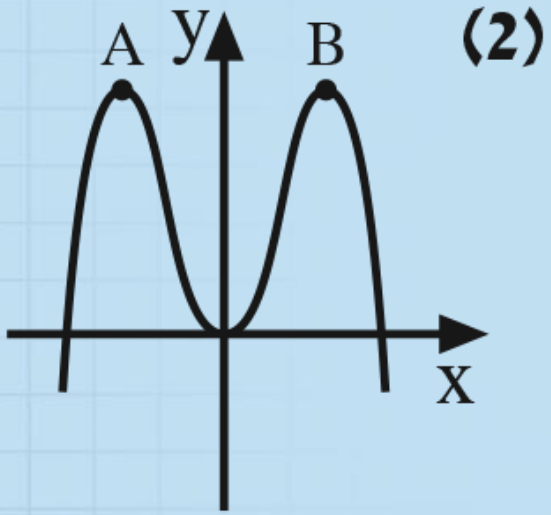
לכן בפונקציה הנוכחית, שיעור ה-y המתאים ל-$x = 2$ הוא 4.

ואז: $\boxed{B\ (2,4)}$

ג. שני הגרפים הנותרים מתארים, לא בהכרח לפי הסדר, את הפונקציות $y = -\frac{1}{4}x^3+3x$
ו-$y = -\frac{1}{4}x^4+2x^2$. חשב את שיעורי הנקודות A ו-B בשני הגרפים הנותרים.

פתרון

כעת נמצא את שיעורי A ו-B בגרף (2) המתאים לפונקציה: $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$



$$y' = -x^3 + 4x$$

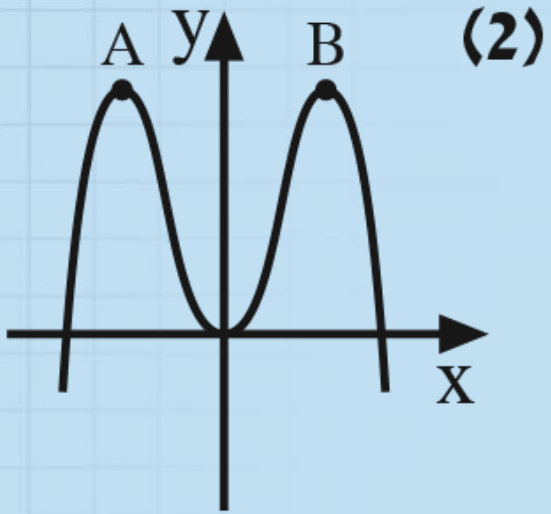
$$-x^3 + 4x = 0$$

$$x(-x^2 + 4) = 0$$

$$x = 0 \qquad -x^2 + 4 = 0$$

$$x = 2, \qquad x = -2$$

ג. שני הגרפים הנותרים מתארים, לא בהכרח לפי הסדר, את הפונקציות $y = -\frac{1}{4}x^3+3x$ ו-$y = -\frac{1}{4}x^4+2x^2$. חשב את שיעורי הנקודות A ו-B בשני הגרפים הנותרים.



פתרון

בינתיים ידוע: $A\ (-2,____)$

$B\ (2,____)$

נמצא את שיעורי ה-y המתאימים על-ידי הצבה בפונקציה המקורית: $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$

$$x = 2 \rightarrow y = -\frac{1}{4}\cdot 2^4 + 2\cdot 2^2 = 4$$

$$x = -2 \rightarrow y = -\frac{1}{4}\cdot (-2)^4 + 2\cdot (-2)^2 = 4$$

ג. שני הגרפים הנותרים מתארים, לא בהכרח לפי הסדר, את הפונקציות $y = -\frac{1}{4}x^3+3x$ ו-$y = -\frac{1}{4}x^4+2x^2$. חשב את שיעורי הנקודות A ו-B בשני הגרפים הנותרים.

פתרון

לסיכום:

$$A\ (-2,4)$$

$$B\ (2,4)$$

בהצלחה