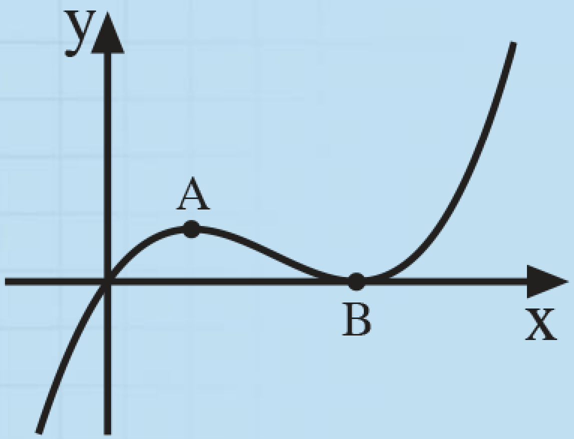
פתרון תרגיל
חקירת פונקציה–
פולינומים

מתמטיקה (5–4 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 728, ת. 42

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה



42) הציור שלפניך מתאר את גרף הפונקציה $y = x(x-1)^2$.
לפונקציה מקסימום בנקודה A ומינימום בנקודה B.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 0$.

ג. המשיק שמצאת בסעיף ב' חותך את גרף הפונקציה הנתונה בנקודה נוספת C. חשב את שיעורי הנקודה C.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

פתרון

<u>סעיף א':</u>

נמצא את נקודות הקיצון על-ידי השוואת נגזרת הפונקציה לאפס.

$$y = x(x-1)^2$$

$$y = x(x^2 - 2x + 1)$$

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

פתרון

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

מקבלים שני פתרונות: $x_1 = \frac{1}{3}$ ו- $x_2 = 1$

נמצא את שיעורי ה-y המתאימים.

$$y = x(x-1)^2$$

$$x = \frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 = \frac{4}{27}$$

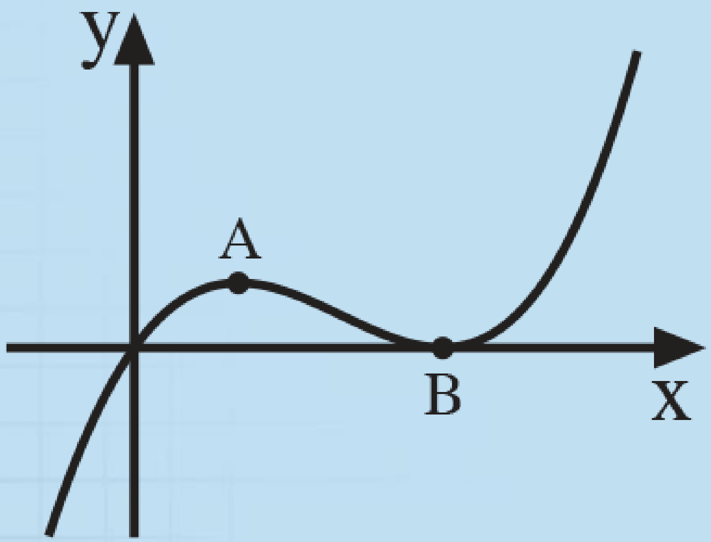
א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

פתרון

$$x = 1 \to y = 1 \cdot (1-1)^2 = 0$$

קיבלנו שנקודות הקיצון הן: $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ ו-$(1,0)$

נתבונן שוב בשרטוט שנתון לנו בשאלה:



רואים כי: $\boxed{A\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right) \text{ ו- } B(1,0)}$

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 0$.

פתרון

סעיף ב':

כדי למצוא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 0$, יש למצוא את **שיפוע המשיק** לפונקציה בנקודה זאת.

תזכורת:

שיפוע המשיק לגרף של פונקציה בנקודה שעל הגרף שווה לערך הנגזרת בנקודה הנ"ל.

מצאנו כבר את פונקציית הנגזרת בסעיף הקודם.

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 0$.

פתרון

$$y'(0) = 1$$

לכן, שיפוע המשיק המבוקש שווה ל-1 $(m = 1)$

כעת נמצא את שיעור ה-y של נקודת ההשקה.

$$y = x(x-1)^2$$

$$x = 0 \to y = 0$$

לפיכך, נקודת ההשקה היא: $(0,0)$

ב.   מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 0$.

פתרון

$$m = 1 \qquad\qquad (0,0)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 1(x - 0)$$

$$\boxed{y = x}$$

ג. המשיק שמצאת בסעיף ב' חותך את גרף הפונקציה הנתונה בנקודה נוספת C.
חשב את שיעורי הנקודה C.

פתרון

<u>סעיף ג':</u>

כדי למצוא את נקודת החיתוך **הנוספת** בין המשיק לבין הפונקציה, נשווה

בין משוואת המשיק למשוואת הפונקציה הנתונה.

$$x(x-1)^2 = x$$

ג. המשיק שמצאת בסעיף ב׳ חותך את גרף הפונקציה הנתונה בנקודה נוספת C.
חשב את שיעורי הנקודה C.

פתרון

$$x(x-1)^2 = x$$

אנו מחפשים נקודת חיתוך נוספת, שבה $x \neq \mathbf{0}$, ולכן **אפשר לחלק** את שני אגפי המשוואה ב-x.

$$(x-1)^2 = 1$$

ג. המשיק שמצאת בסעיף ב' חותך את גרף הפונקציה הנתונה בנקודה נוספת C.
חשב את שיעורי הנקודה C.

פתרון

$$(x-1)^2 = 1$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

$$x - 1 = -1$$

$$\cancel{x = 0}$$

פתרון זה נפסל.

ג. המשיק שמצאת בסעיף ב' חותך את גרף הפונקציה הנתונה בנקודה נוספת C.
חשב את שיעורי הנקודה C.

פתרון

נמצא את שיעור ה-y המתאים ל- $x = 2$.

$$y = x$$

$$x = 2 \rightarrow y = 2$$

לפיכך, הנקודה המבוקשת היא: $\boxed{C(2,2)}$

בהצלחה