פתרון תרגיל

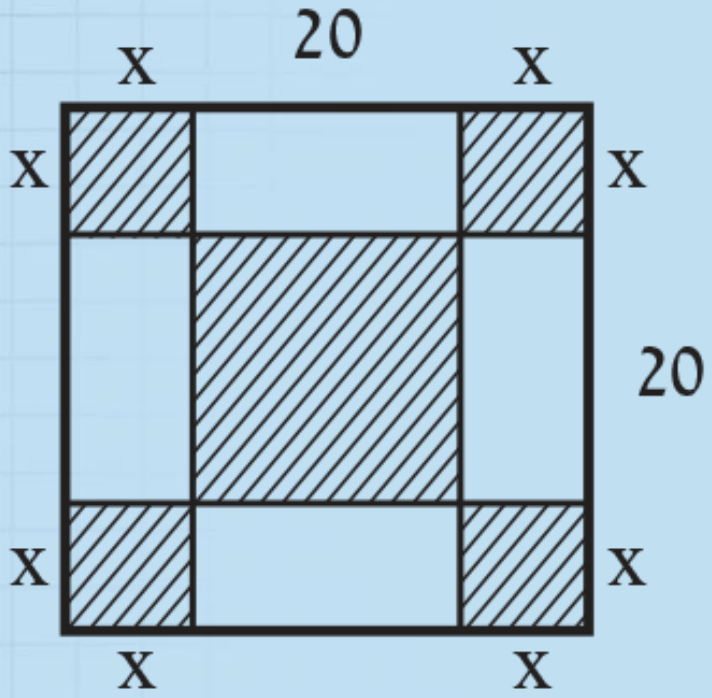
בעיות קיצון בהנדסת המישור – פולינומים

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 767, ת. 20

המצגת נערכה ע"י טל מדר
כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

השאלה



20) בריבוע שצלעו 20 ס״מ חסומים 4 ריבועים זהים בפינות וריבוע נוסף במרכז (השטח המקווקו).

א. חשב מה צריך להיות אורך הצלע x של ריבוע בפינה כדי שסכום השטחים המקווקווים של חמשת הריבועים יהיה מינימלי.

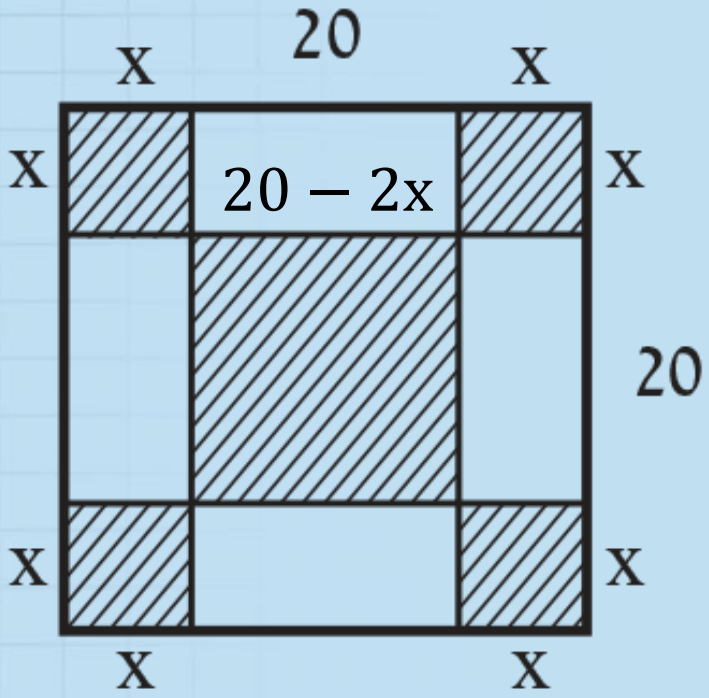
ב. מצא את השטח המינימלי.

ג. מצא את x עבורו השטח המקווקו מקסימלי. מה גודל השטח במקרה זה?

ד. (ללא קשר לנתונים הקודמים) הוכח שאם צלע הריבוע היא a והשטח המקווקו הוא S אז: $\frac{a^2}{2} \le S \le a^2$.

א. חשב מה צריך להיות אורך הצלע x של ריבוע בפינה כדי שסכום השטחים המקווקווים של חמשת הריבועים יהיה מינימלי.

פתרון



פונקי המטרה הרצויה היא סכום שטחי הריבועים

$$y = 4x^2 + (20 - 2x)^2$$

$$y = 4x^2 + 400 - 80x + 4x^2$$

$$y = 8x^2 - 80x + 400$$

$$y' = 16x - 80$$

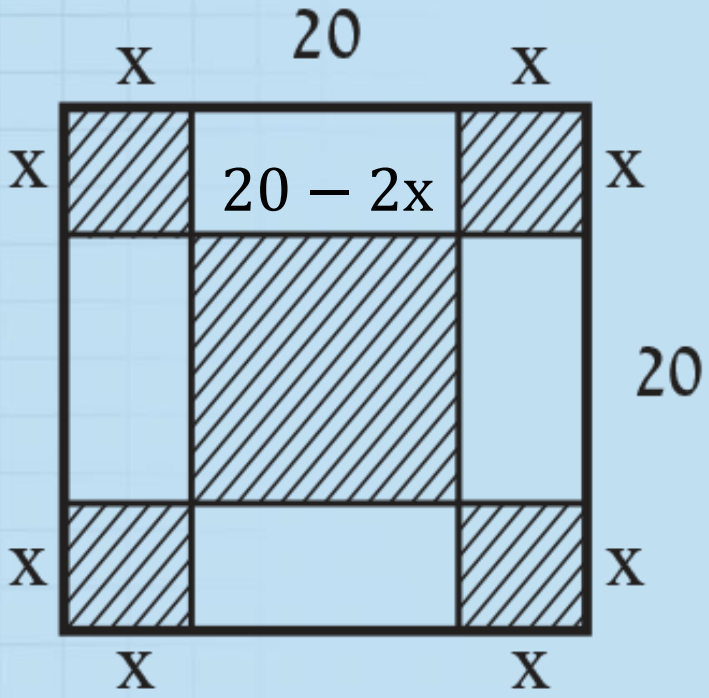
$$0 = 16x - 80$$

$x =$ 5 ס״מ

$y'' = 16 > 0$ ***min***

ב. מצא את השטח המינימלי.

פתרון



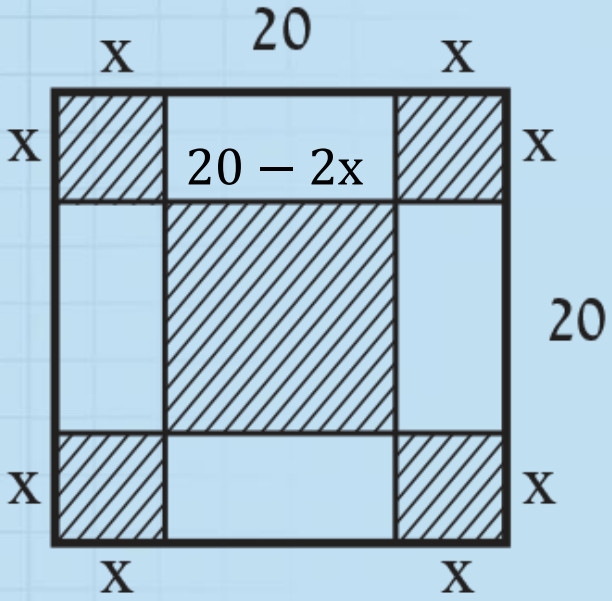
נציב $x=5$ בפונקי' המטרה ונקבל:

$$y_{(5)} = 8 \cdot (5)^2 - 80 \cdot (5) + 400$$

$$S_{min} = 200 \text{ סמ"ר}$$

ג. מצא את x עבורו השטח המקווקו מקסימלי. מה גודל השטח במקרה זה?

פתרון



נבדוק את נק' הקצה $x=10$, $x=0$ ע"י הצבתם בפוני' המטרה ונבחר את הערך המקס':

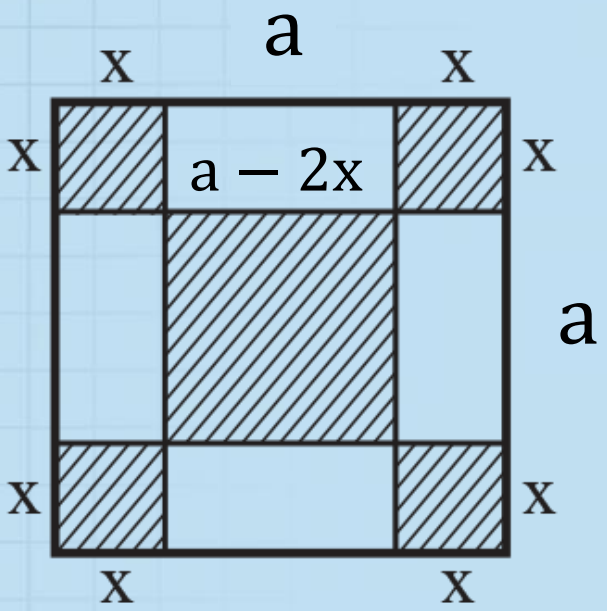
$$y_{(0)} = 8 \cdot (0)^2 - 80 \cdot (0) + 400 = 400 \text{ סמ"ר}$$

$$y_{(10)} = 8 \cdot (10)^2 - 80 \cdot (10) + 400 = 400 \text{ סמ"ר}$$

עבור $x=10$, $x=0$ נקבל שטח מקס' שהוא 400 סמ"ר

ד. (ללא קשר לנתונים הקודמים) הוכח שאם צלע הריבוע היא a והשטח המקווקו הוא S אז: $\frac{a^2}{2} \le S \le a^2$.

פתרון



נראה שהשטח המקסי' המתקבל הינו a^2 והמיני' הוא $\frac{a^2}{2}$ פונקי' המטרה הינה:

$$y = 4x^2 + (a - 2x)^2 = 4x^2 + a^2 - 4ax + 4x^2$$

$$y = 8x^2 - 4ax + a^2$$

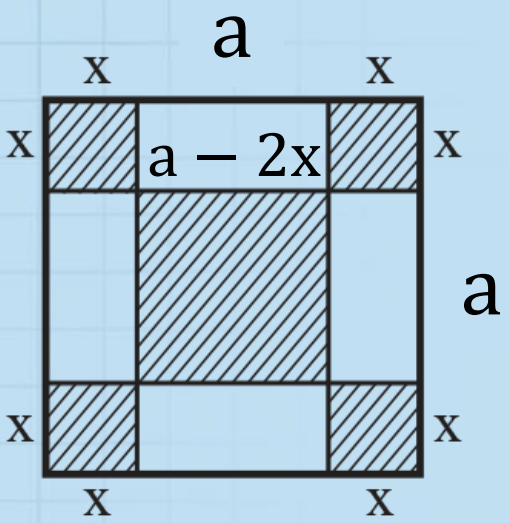
$$y' = 16x - 4a$$

$$x = \frac{a}{4}$$

$$y'' = 16 > 0 \text{ min}$$

ד. (ללא קשר לנתונים הקודמים) הוכח שאם צלע הריבוע היא a והשטח המקווקו הוא S אז: $\frac{a^2}{2} \le S \le a^2$.

פתרון



$$S_{min} = 8(\frac{a}{4})^2 - 4a \cdot \left(\frac{a}{4}\right) + a^2 = 8 \cdot \frac{a^2}{16} - \frac{4a^2}{4} + a^2 = \frac{a^2}{2} \quad min$$

עבור נק' קצה $x=\frac{a}{2}$, $x = 0$ נציב בפונק' המטרה

ונקבל שהשטח המקסימלי הוא a^2

$$S_{max} = 8(\frac{a}{2})^2 - 4a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) + a^2 = 8 \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{4a^2}{2} + a^2 = a^2 \quad max$$

$$\frac{a^2}{2} \le S \le a^2$$

$$S_{max} = 8(0)^2 - 4a \cdot (0) + a^2 = a^2 \quad max$$

בהצלחה