פתרון תרגיל

בעיות קיצון עם מס' – פולינומים

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

581–481 , עמ' 763, ת. 27

המצגת נערכה ע"י טל מדר

השאלה

27) a ו-b הם שני מספרים חיוביים שסכומם 1.

הוכח: $ab \le \frac{1}{4}$.

27) a ו-b הם שני מספרים חיוביים שסכומם 1. הוכח: $ab \le \frac{1}{4}$.

פתרון

רוצים להוכיח שמכפלת המספרים המקסימלית הינה $\frac{1}{4}$ לכן פונקציית המטרה שלנו הינה מכפלת המספרים $y = a \cdot b$

והנתון הוא כי: $a + b = 1$

$b = 1 - a$

$y = a(1 - a)$

$y = a - a^2$

$y' = 1 - 2a$

$0 = 1 - 2a$

$2a = 1 \longrightarrow \boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$, $\mathbf{b = \frac{1}{2}}$

27) a ו-b הם שני מספרים חיוביים שסכומם 1. הוכיח: $ab \le \frac{1}{4}$.

פתרון

$$y'' = -2 < 0 \quad \boldsymbol{max}$$

והערך המקס' הינו:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$a \cdot b \le \frac{1}{4}$$

27) a ו-b הם שני מספרים חיוביים שסכומם 1. הוכח: $ab \le \frac{1}{4}$.

פתרון

נפתור את התרגיל כעת בדרך אלגברית ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי.

ידוע כי $a + b = 1$ אם כך $b = 1 - a$.

יש להוכיח ש- $ab \le \frac{1}{4}$ כלומר ש- $a \cdot (1 - a) \le \frac{1}{4}$

$$4a \cdot (1 - a) \le 1$$

$$4a - 4a^2 \le 1$$

$$0 \le 4a^2 - 4a + 1$$

$$\mathbf{0 \le (2a - 1)^2}$$

זהו אי שוויון זהותי שמתקיים לכל a.
היות והגענו לביטוי זהותי גם השורה ממנה יצאנו מתקיימת כזהות.

בהצלחה