הקנייה

בעיות קיצון עם מס' – פולינומים

מתמטיקה (5–4 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 759–760

המצגת נערכה ע"י טל מדר

הקנייה

דוגמא:

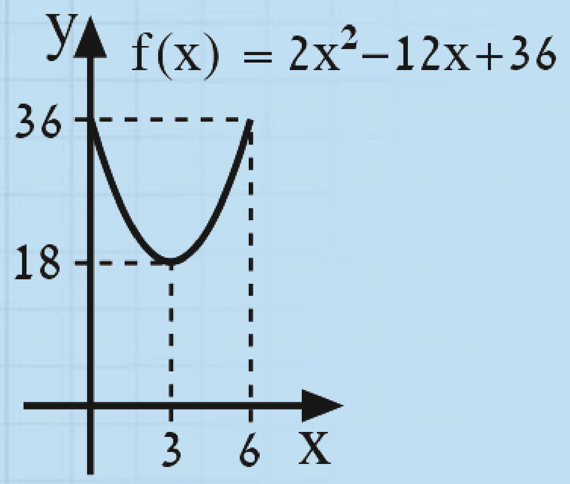
מצא שני מספרים אי שליליים שסכומם 6 וסכום ריבועיהם הוא: א. מינימלי. ב. מקסימלי.

פתרון:

א. המשתנים הם שני המספרים, הנתון הקבוע הוא סכומם השווה ל-6 והמשתנה שרוצים למצוא לו מינימום הוא סכום הריבועים. נסמן מספר אחד ב-x. היות וסכומם 6 אז המספר השני הוא $6-x$. סכום הריבועים של שני המספרים הוא פונקציה של x שנסמנה ב-$f(x)$. כלומר: $f(x) = x^2+(6-x)^2 = 2x^2-12x+36$. נגזור ונשווה לאפס: $f'(x) = 4x-12 = 0$, לכן $4x = 12$ ומכאן $x = 3$. נגזור פעם שנייה: $f''(x) = 4$ לכן מתקבל מינימום. המספר השני הוא $6-x$, כלומר גם הוא 3.

לסיכום: שני המספרים האי שליליים שסכומם 6 וסכום ריבועיהם הוא מינימלי הם 3 ו-3. סכום הריבועים המינימלי הוא: $f(3) = 3^2+3^2 = 18$.

הקנייה



ב. כדי למצוא את סכום הריבועים המקסימלי **לא** נוכל להיעזר **בנגזרת**. למעשה צריך למצוא את **המקסימום המוחלט** של הפונקציה $f(x) = 2x^2-12x+36$ בתחום $0 \le x \le 6$ (כי המספרים אי שליליים). הגרף של הפונקציה הנ"ל הוא פרבולה שיש לה נקודת מינימום (כפי שראינו) ולכן **המקסימום המוחלט יתקבל בקצוות** כלומר ב-$x = 0$ או ב-$x = 6$.

הקנייה

לסיכום: שני המספרים האי שליליים שסכומם 6 וסכום ריבועיהם הוא מקסימלי הם 0 ו-6. סכום הריבועים המקסימלי הוא: $f(0) = f(6) = 36$.

שים לב – להגבלה ששני המספרים אי שליליים יש חשיבות לגבי המקסימום. אם אחד מהמספרים יכול להיות שלילי אז לפונקציה הנ"ל אין מקסימום מוחלט.

הקנייה

הערות:

א) בבעיות מינימום ומקסימום מחפשים את המינימום והמקסימום **המוחלטים** ולא המקומיים ולכן יש חשיבות לבדיקת הערכים **בנקודות הקצה** והשוואתם עם הערך המתקבל בנקודת **קיצון פנימית**.

ב) אם הפונקציה y היא מהצורה $y = k \cdot f(x)$ (כלומר מכפלה של גודל קבוע בביטוי המכיל את x) ניתן לנוחיות **להתעלם מהגודל הקבוע** לפני הגזירה. הסיבה היא שבכל מקרה משווים את הנגזרת לאפס ולכן הגודל הקבוע **יצטמצם** ולא ישנה את התוצאה לגבי x. יחד עם זאת, כאשר צריך לחשב את y אין להתעלם מהגודל הקבוע.

בהצלחה