פתרון תרגיל

משפט הקוסינוסים – מרובעים

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 508, ת. 37

המצגת נערכה ע"י יוסי כהן
כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

השאלה

★**37)** במקבילית ABCD האלכסון הקצר AC מאונך לצלע BC, האלכסון BD הוא 2k והזוית החדה שבין האלכסונים היא α.

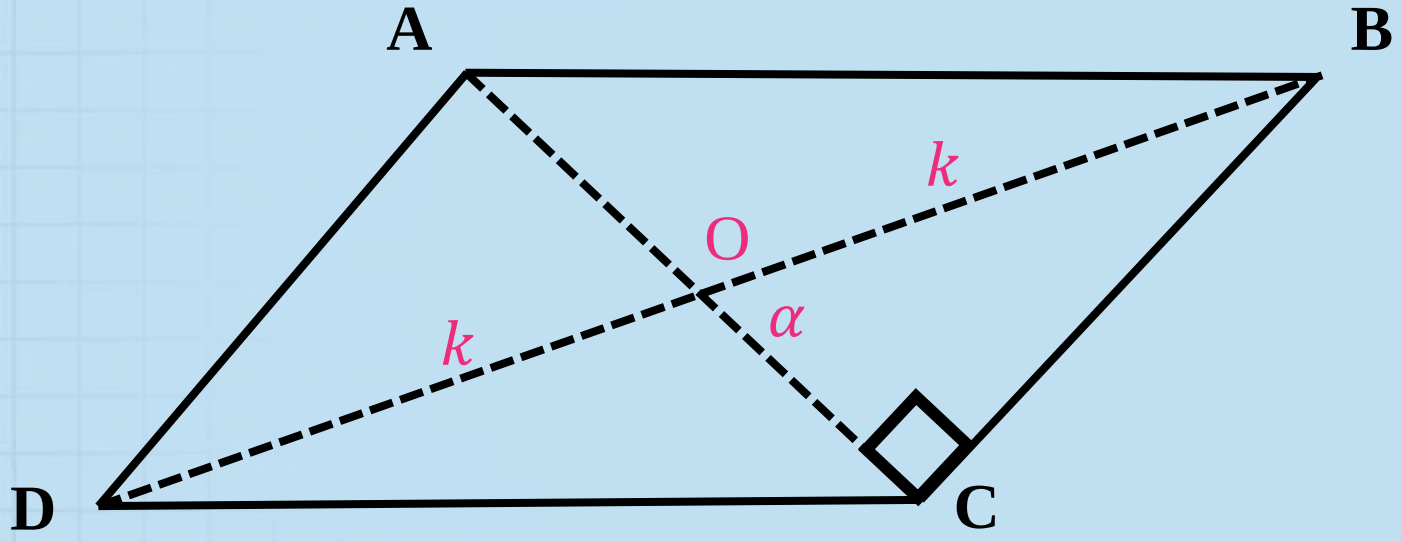
א. הוכח שצלעות המקבילית הן: $BC = k\sin\alpha$, $DC = k\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$ ושטחה הוא: $2k^2\sin\alpha\cos\alpha$. **(הערה:** באחת מהדרכים לפתרון צריך להיעזר בזהות $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$**)**. (ראה עמ' 402).

ב. נתון: $DC = 2BC$. מצא את α והבע באמצעות k את שטח המקבילית.
(הערה: כדי לענות על סעיף ב' צריך להיעזר בזהות $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ולפתור משוואה טריגונומטרית פשוטה).

א. הוכח שצלעות המקבילית הן: $BC = k\sin\alpha$, $DC = k\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$ ושטחה הוא: $2k^2\sin\alpha\cos\alpha$.

פתרון

נשרטט, נשלים ונסמן את הזוויות והצלעות.



$$DO = OB = k$$

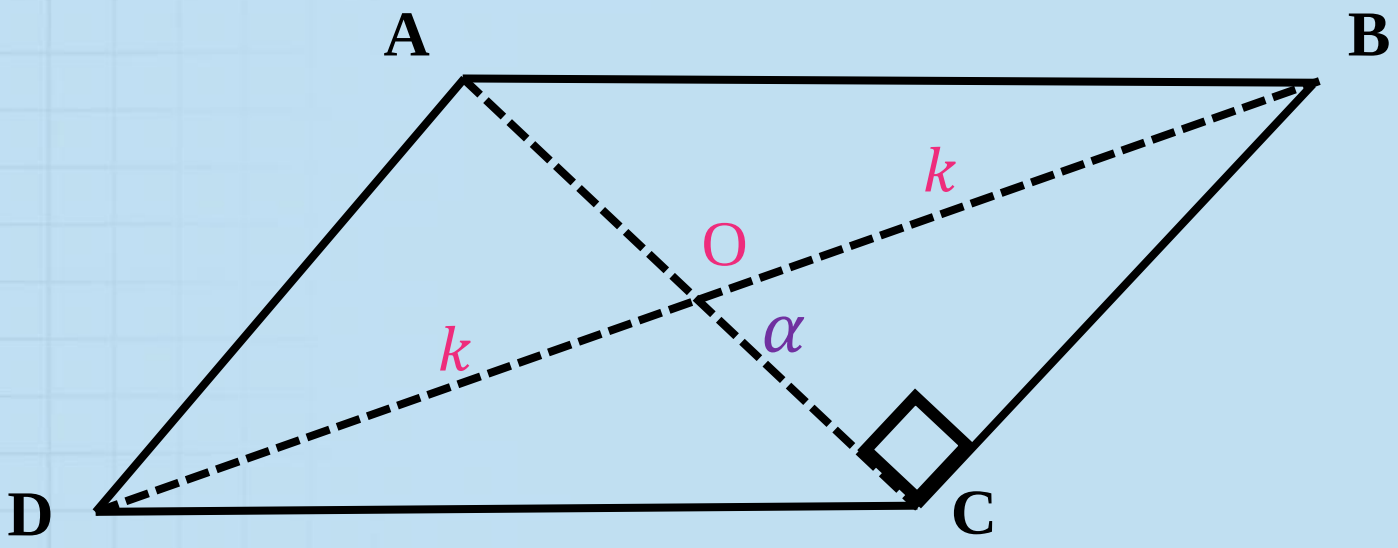
$$\measuredangle ACB = 90°$$

$$\measuredangle BOC = \alpha$$

א. הוכח שצלעות המקבילית הן: $BC = k\sin\alpha$, $DC = k\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$ ושטחה הוא: $2k^2\sin\alpha\cos\alpha$.

פתרון

נתבונן במשולש OBC , משולש ישר זווית



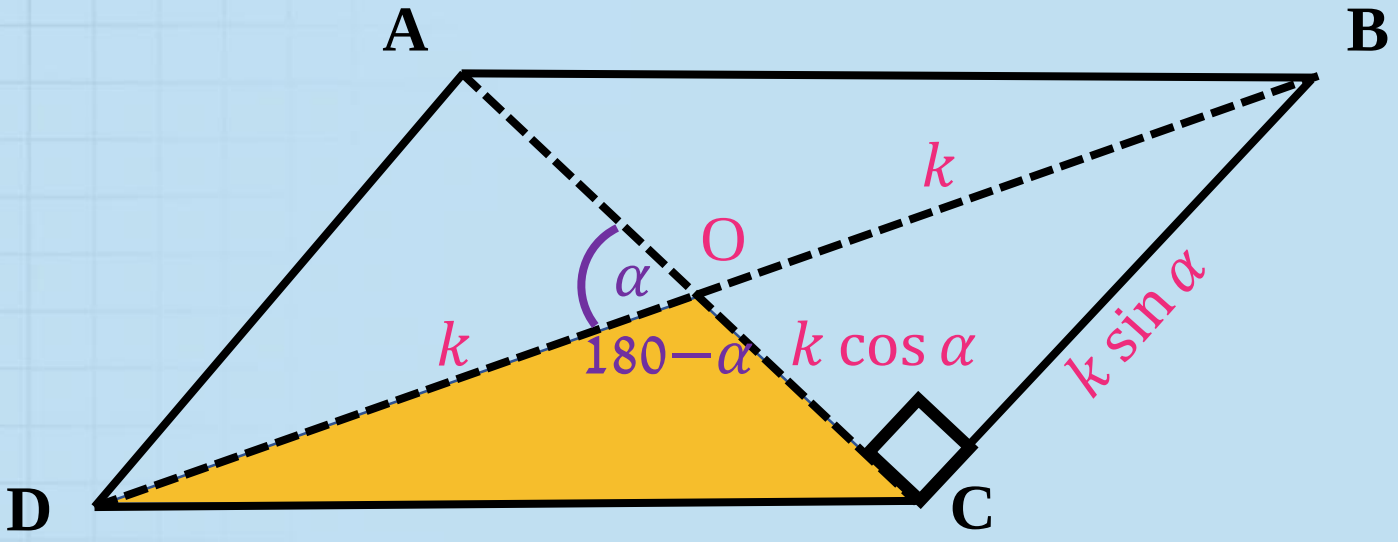
$$\sin\alpha = \frac{BC}{k}$$

$$BC = k\sin\alpha$$

$$OC = k\cos\alpha$$

א. הוכח שצלעות המקבילית הן: $BC = k\sin\alpha$, $DC = k\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$ ושטחה הוא: $2k^2\sin\alpha\cos\alpha$.

פתרון



נתבונן במשולש DOC.

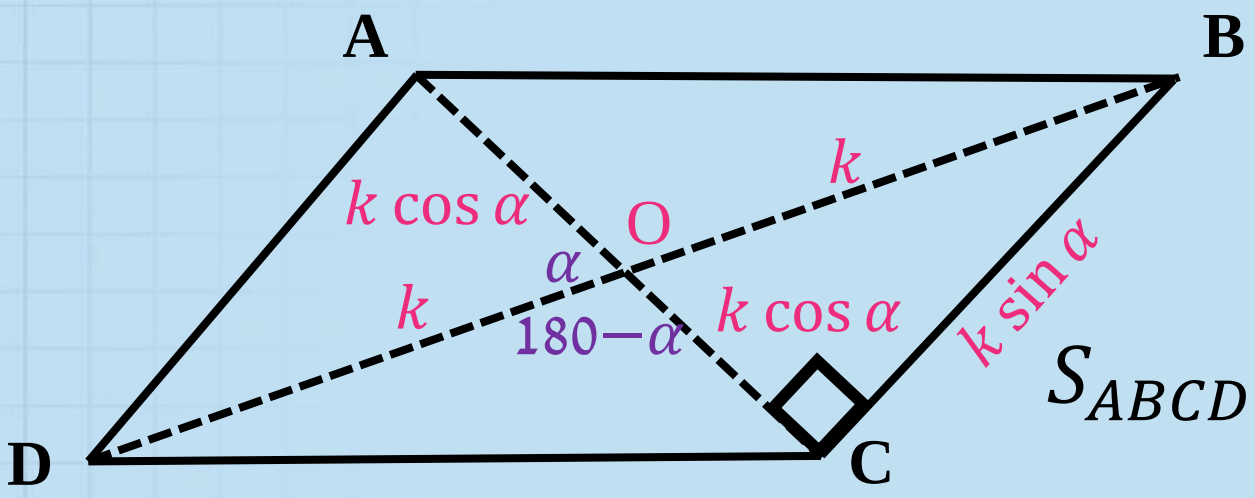
$$DC^2 = k^2 + (k\cos\alpha)^2 - 2k\cdot k\cos\alpha\cdot\cos(180-\alpha)$$

$$DC^2 = k^2 + (k\cos\alpha)^2 + 2k\cdot k\cos\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$DC = k\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$$

א. הוכח שצלעות המקבילית הן: $BC = k\sin\alpha$, $DC = k\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$ ושטחה הוא: $2k^2\sin\alpha\cos\alpha$.

פתרון



שטח המקבילית

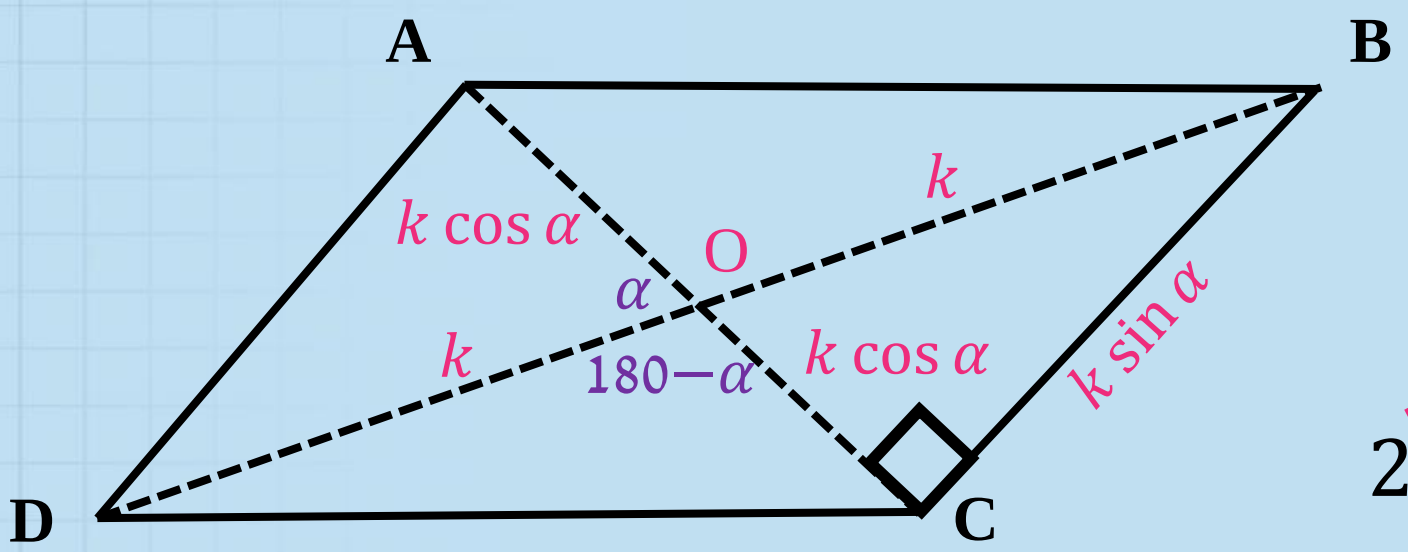
$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ACB} = \frac{\cancel{2}\cdot 2k\cos\alpha\cdot k\sin\alpha}{\cancel{2}}$$

$$S_{ABCD} = 2k^2\cos\alpha\sin\alpha$$

הערה: ניתן להגיע לתוצאה של שטח המקבילית גם ע"י שימוש בנוסחה:
שטח מרובע שווה למחצית מכפלת האלכסונים בסינוס הזווית שביניהם

ב. נתון: $DC = 2BC$. מצא את α והבע באמצעות k את שטח המקבילית.

פתרון



$$BC = k\sin\alpha$$

$$DC = k\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$$

$$2\cancel{k}\sin\alpha = \cancel{k}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$$

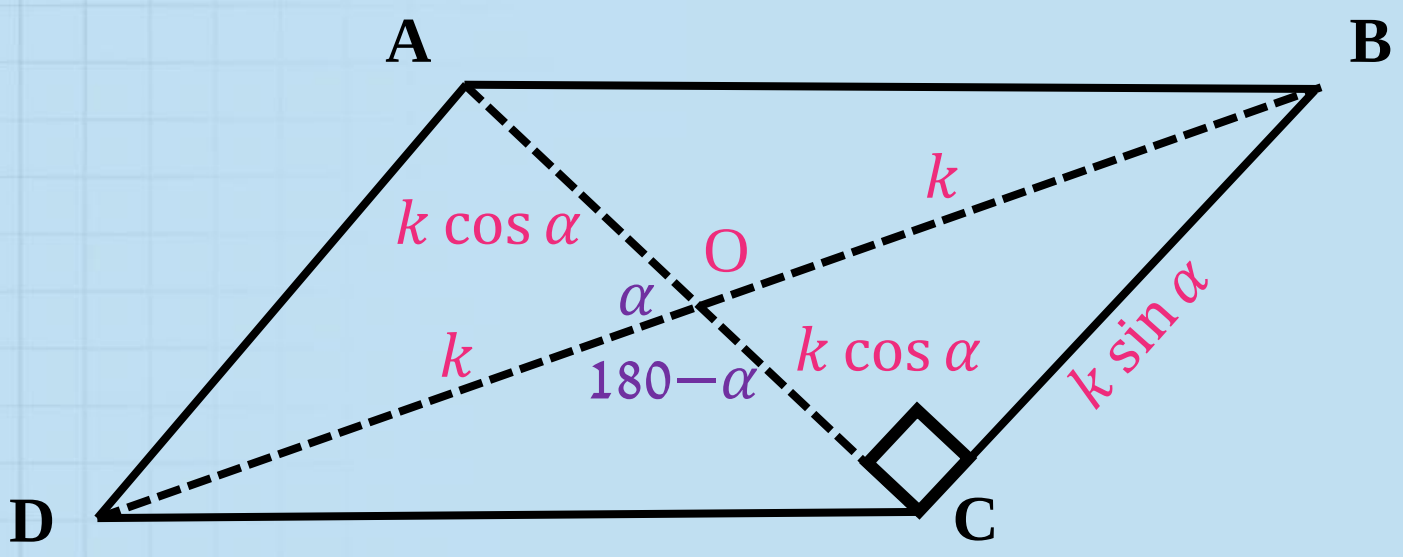
(העלאה בריבוע)

$$4\sin^2\alpha = 1+3\cos^2\alpha$$

$$4\sin^2\alpha = 1+3(1-\sin^2\alpha)$$

ב. נתון: $DC = 2BC$. מצא את α והבע באמצעות k את שטח המקבילית.

פתרון



$$4\sin^2\alpha = 1 + 3(1 - \sin^2\alpha)$$

$$7\sin^2\alpha = 4$$

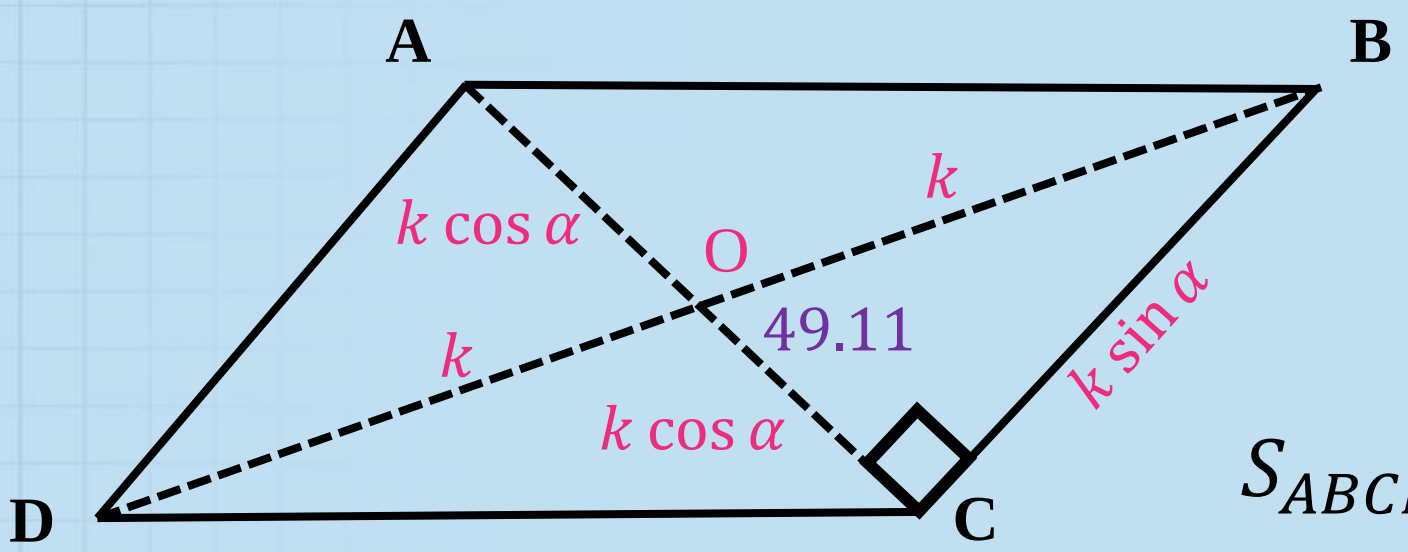
$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\alpha = 49.11°$$

זווית חדה ולכן יש רק פתרון אחד.

ב. נתון: $DC = 2BC$. מצא את α והבע באמצעות k את שטח המקבילית.

פתרון



$$\alpha = 49.11°$$

$$S_{ABCD} = 2k^2 \cos\alpha \sin\alpha$$

$$S_{ABCD} = 2k^2 \cos 49.11° \sin 49.11°$$

$$\boldsymbol{S_{ABCD} = 0.99k^2}$$

בהצלחה