פתרון תרגיל

חקירת פונקציה–
פולינומים

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 727, ת. 38

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה

38) לפונקציה $y = -x^3-ax^2+ax$ יש נקודת קיצון בנקודה $x = 2$.

א. מצא את a.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. מצא את a.

פתרון

<u>סעיף א':</u>

תזכורת:

משפט:

אם פונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה x_1 והנקודה x_1 היא נקודת קיצון אז $f'(x_1) = 0$.

כלומר: אם בנקודה מסויימת יש לפונקציה ערך **קיצון** אז ערך **הנגזרת** בנקודה זו הוא אפס.

מסקנה: נתון לנו כי: $y'(2) = 0$

א. מצא את a.

פתרון

$$y = -x^3 - ax^2 + ax$$

$$y' = -3x^2 - 2ax + a$$

$$y'(2) = 0 \quad \rightarrow \quad -3 \cdot 2^2 - 2a \cdot 2 + a = 0$$

$$-12 - 4a + a = 0$$

$$-12 - 3a = 0$$

$$-3a = 12$$

$$\boxed{\boldsymbol{a = -4}}$$

ב.   מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

<u>סעיף ב':</u>

$$y' = -3x^2 - 2ax + a$$

$$a = -4 \rightarrow y' = -3x^2 + 8x - 4$$

$$-3x^2 + 8x - 4 = 0$$

נפתור בעזרת טרינום או בעזרת נוסחת שורשים, ונקבל:

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

נשתמש כעת **בנגזרת השנייה**.

$$y' = -3x^2 + 8x - 4$$

$$y'' = -6x + 8$$

$x = 2 \rightarrow y''(2) = -6 \cdot 2 + 8 = -4 < 0 \longrightarrow$ מקסימום

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$x = \frac{2}{3} \to y''\left(\frac{2}{3}\right) = -6 \cdot \frac{2}{3} + 8 = 4 > 0 \longrightarrow$$ מינימום

נמצא את **שיעורי ה- y** של נקודות הקיצון על-ידי הצבה בפונקציה המקורית.

$$y = -x^3 - ax^2 + ax$$

$$a = -4 \to \quad y = -x^3 + 4x^2 - 4x$$

$$x = 2 \to y = -2^3 + 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 0 \longrightarrow (2,0)$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$x=\frac{2}{3}\rightarrow y=-\left(\frac{2}{3}\right)^3+4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3}=-1\frac{5}{27}\ \rightarrow\ \left(\frac{2}{3},-1\frac{5}{27}\right)$$

לסיכום, נקודות הקיצון הן:

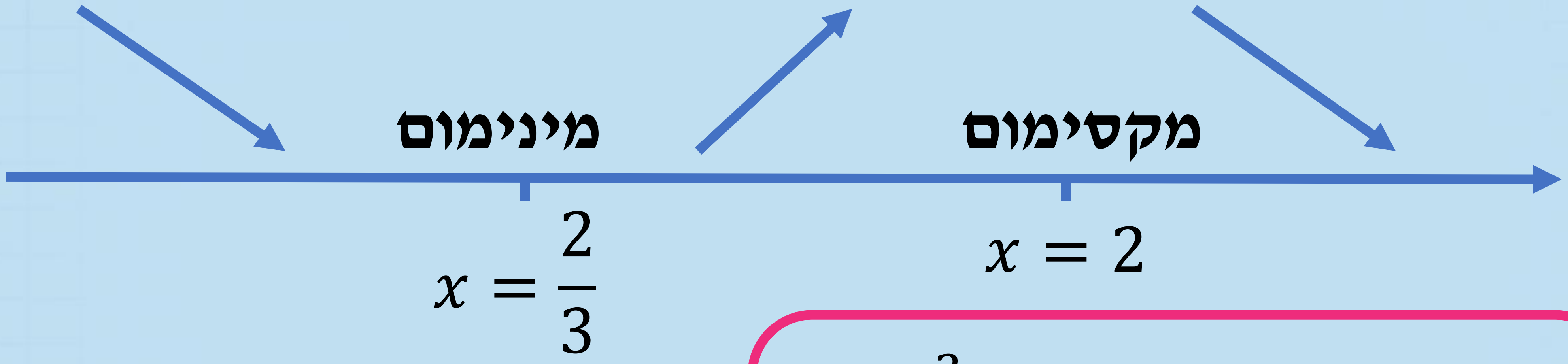
מקסימום $(2,0)$

מינימום $\left(\frac{2}{3},-1\frac{5}{27}\right)$

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

<u>סעיף ג':</u>



<u>תחומי עליה</u>: $\frac{2}{3} < x < 2$

<u>תחומי ירידה</u>: $x > 2$, $x < \frac{2}{3}$

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

פתרון

סעיף ד':

$$y = -x^3 + 4x^2 - 4x$$

חיתוך עם ציר ה-y :

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

חיתוך עם ציר ה-x :

$$y = 0 \;\rightarrow\; -x^3 + 4x^2 - 4x = 0$$

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

פתרון

$$x(-x^2+4x-4)=0$$

$$x=0$$

$$-x^2+4x-4=0$$

$$x=2$$

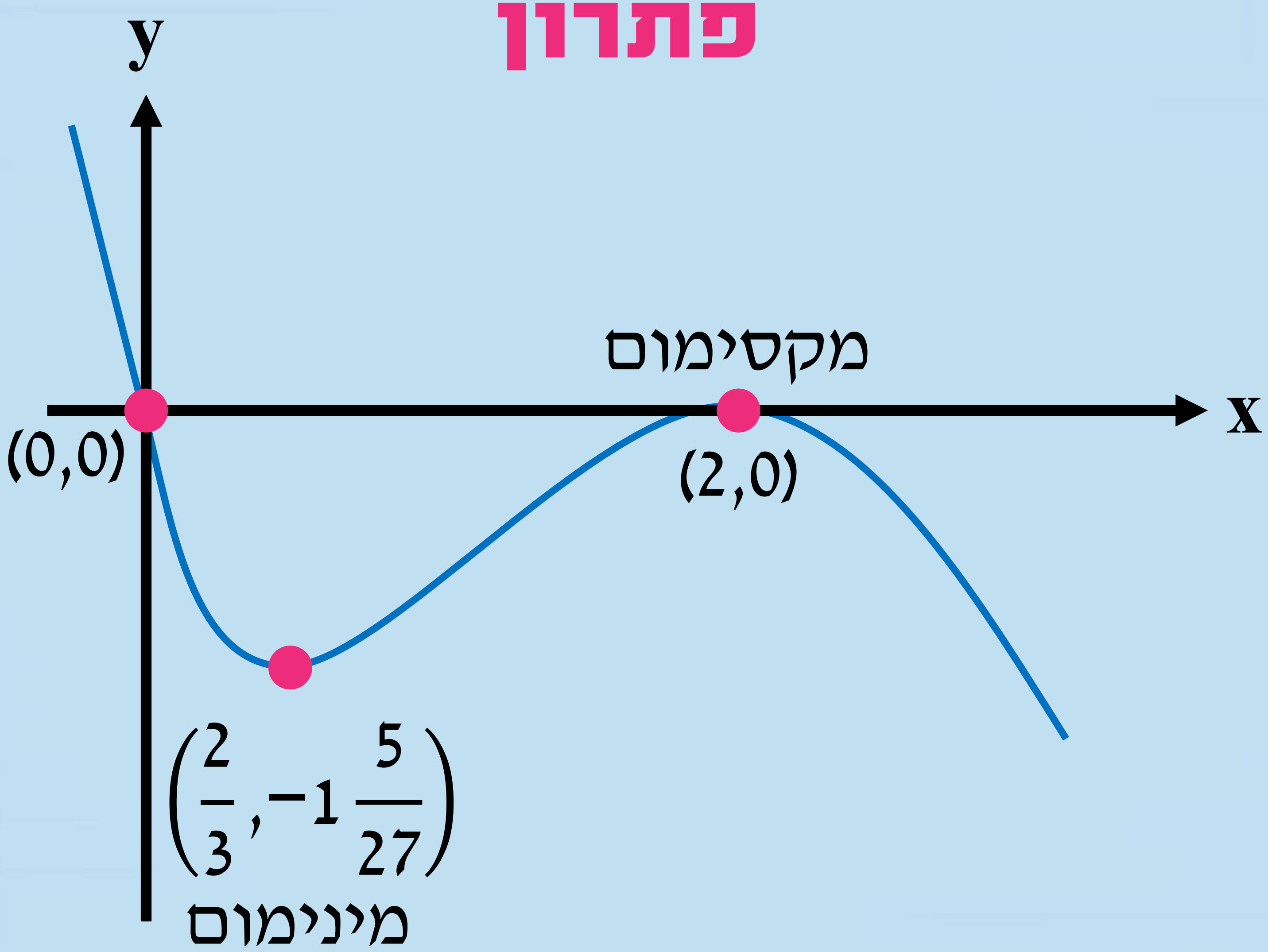
לסיכום, נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים הן:

$\boxed{(0,0)\ \text{ו-}\ (2,0)}$

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

<u>סעיף ה':</u>



בהצלחה