פתרון תרגיל

חקירת פונקציה– פולינומים

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 727, ת. 35

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה

חקור את הפונקציות הבאות בהתאם לסעיפים הבאים ומצא:

א) תחום הגדרה.

ב) נקודות קיצון.

ג) תחומי עלייה וירידה.

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

ה) שרטט את גרף הפונקציה.

35) $y = x^4 - 2x^3 + x^2$

$y = x^4 - 2x^3 + x^2$

פתרון

א. תחום הגדרה

כל x.

ב. נקודות קיצון

נחפש נקודות החשודות כקיצון על-ידי השוואת הנגזרת של הפונקציה לאפס.

$$y = x^4 - 2x^3 + x^2$$

$$y' = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$4x^3 - 6x^2 + 2x = 0$$

$y = x^4 - 2x^3 + x^2$

פתרון

$$2x(2x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$2x = 0 \qquad\qquad 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = 0$$

פותרים בעזרת טרינום או נוסחת שורשים, ומקבלים:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1$$

$$y = x^4 - 2x^3 + x^2$$

פתרון

נשתמש כעת בנגזרת השנייה.

$$y' = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$y'' = 12x^2 - 12\mathrm{x} + 2$$

$$y''(0) = 2 > 0 \longrightarrow$$ **מינימום**

$$y''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 2 = -1 < 0 \longrightarrow$$ **מקסימום**

$y = x^4 - 2x^3 + x^2$

פתרון

$y''(1) = 12 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 2 = 2 > 0 \longrightarrow$ מינימום

נמצא את שיעורי ה-y של נקודות הקיצון שמצאנו.

$$y = x^4 - 2x^3 + x^2$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \quad \rightarrow \quad (0,0)$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$$

$y = x^4 - 2x^3 + x^2$

פתרון

$$x = 1 \rightarrow y = 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad (1,0)$$

לסיכום:

$(0,0)$ מינימום

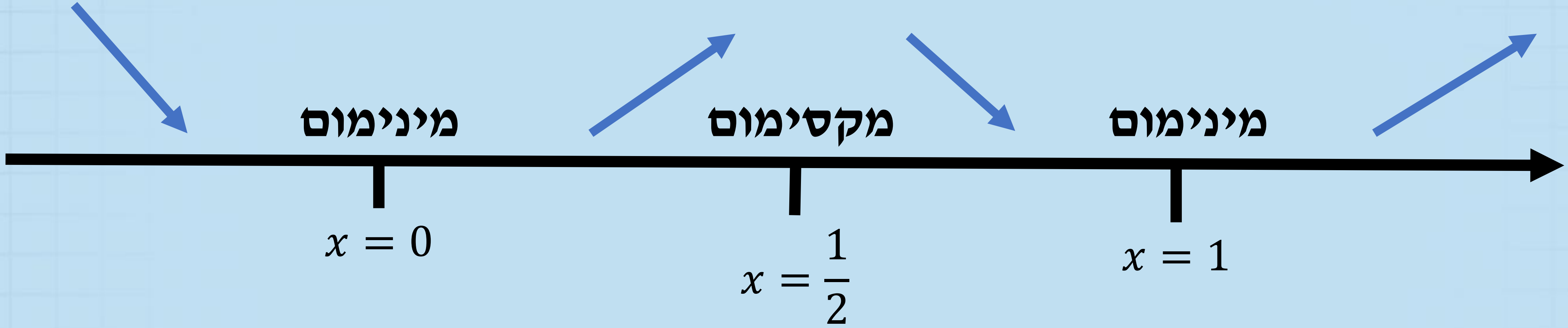
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$ מקסימום

$(1,0)$ מינימום

$$y = x^4 - 2x^3 + x^2$$

פתרון

ג. תחומי עלייה וירידה



<u>תחומי עליה</u>: $x > 1$, $0 < x < \frac{1}{2}$

<u>תחומי ירידה</u>: $\frac{1}{2} < x < 1$, $x < 0$

פתרון

ד. נקודות חיתוך עם הצירים

$$y = x^4 - 2x^3 + x^2$$

<u>חיתוך עם ציר ה-y</u>:

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{(0,0)}$$

<u>חיתוך עם ציר ה-x</u>:

$$y = 0 \rightarrow \quad x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$$

$$y = x^4-2x^3+x^2$$

פתרון

$$x^2(x^2-2x+1)=0$$

$$x^2=0 \qquad\qquad x^2-2x+1=0$$

$$x=0 \qquad\qquad x=1$$

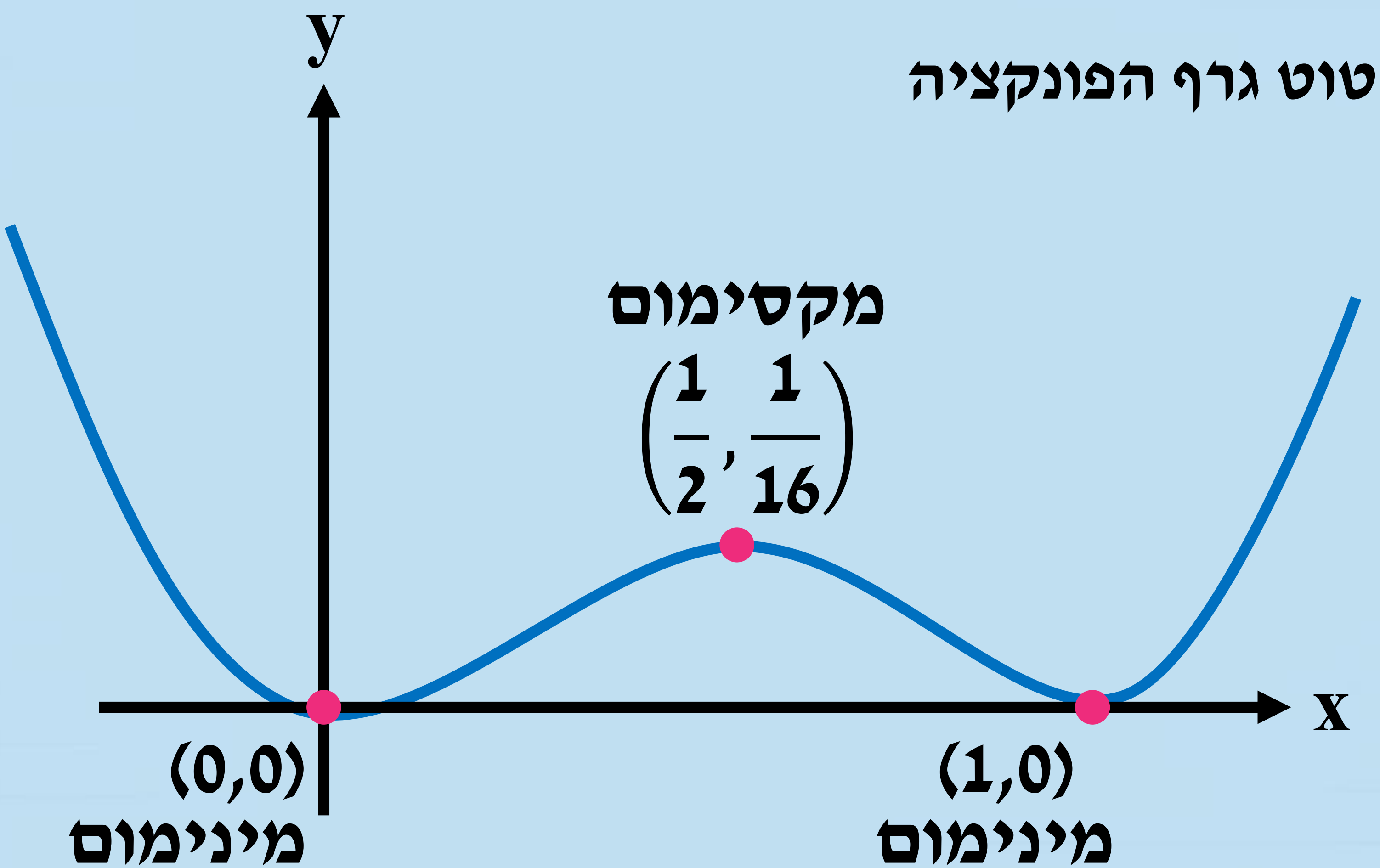
נקודות החיתוך עם ציר ה-x הן: $\boxed{(0,0)\ \text{ו-}\ (1,0),}$

ואלה גם **כל** נקודות החיתוך עם הצירים.

$y = x^4 - 2x^3 + x^2$

פתרון

ה. שרטוט גרף הפונקציה



בהצלחה