פתרון תרגיל
עלייה וירידה – פולינומים
מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 720, ת. 55

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

55) נתונה הפונקציה $y = 4x^3 - 3ax^2 - 6a^2x$, $a > 0$.

א. הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. הבע באמצעות a את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

נתונה הפונקציה $y = 4x^3 - 3ax^2 - 6a^2x$, $a > 0$.

א. הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

סעיף א':

$$y = 4x^3 - 3ax^2 - 6a^2x$$

$$y' = 12x^2 - 6ax - 6a^2$$

$$12x^2 - 6ax - 6a^2 = 0 \quad /:6$$

$$2x^2 - ax - a^2 = 0$$

נתונה הפונקציה $y = 4x^3 - 3ax^2 - 6a^2x$, $a > 0$.

א. הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$2x^2 - ax - a^2 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -a \qquad c = -a^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-a^2)}}{4}$$

נתונה הפונקציה $y = 4x^3 - 3ax^2 - 6a^2x$, $a > 0$.

א. הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{9a^2}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{a \pm 3a}{4}$$

$$x_1 = \frac{4a}{4} = a$$

$$x_2 = \frac{-2a}{4} = -\frac{a}{2}$$

נתונה הפונקציה $y = 4x^3 - 3ax^2 - 6a^2x$, $a > 0$.

א. הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

לפיכך, יש שתי נקודות החשודות כקיצון.

נשתמש כעת בנגזרת השנייה.

$$y' = 12x^2 - 6ax - 6a^2$$

$$y'' = 24x - 6a$$

$$x = a \rightarrow y''(a) = 24a - 6a = 18a$$

ניזכר שנתון לנו בתרגיל כי: $a > 0$.

לכן מתקיים: $18a > 0$ לכן זו נקודת מינימום.

נתונה הפונקציה $y = 4x^3 - 3ax^2 - 6a^2x$, $a > 0$.

א. הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

לכן: $y''(a) > 0$, **ולכן** $x = a$ היא נקודת מינימום.

$$y''\left(-\frac{a}{2}\right) = 24 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) - 6a$$

$$y''\left(-\frac{a}{2}\right) = -18a$$

ניזכר שנתון לנו בתרגיל כי: $a > 0$.

לכן מתקיים: $-18a < 0$ לכן זו נקודת מקסימום.

נתונה הפונקציה $y=4x^3-3ax^2-6a^2x$, $a>0$.

א. הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

כעת נמצא את שיעורי ה-y של שתי נקודות הקיצון שמצאנו.

$$y=4x^3-3ax^2-6a^2x$$

$$x=a\rightarrow y=4a^3-3a\cdot a^2-6a^2\cdot a=-5a^3$$

$$x=-\frac{a}{2}\rightarrow y=4\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)^3-3a\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)^2-6a^2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$y=4\cdot\left(\frac{-a^3}{8}\right)-3\mathrm{a}\cdot\frac{a^2}{4}+3a^3$$

נתונה הפונקציה $y = 4x^3 - 3ax^2 - 6a^2x$, $a > 0$.

א. הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$y = \frac{-a^3}{2} - \frac{3a^3}{4} + 3a^3$$

$$y = \frac{-2a^3 - 3a^3 + 12a^3}{4} = \frac{7a^3}{4}$$

לסיכום:

$(a, -5a^3)$ מינימום

$\left(-\frac{a}{2}, \frac{7a^3}{4}\right)$ מקסימום

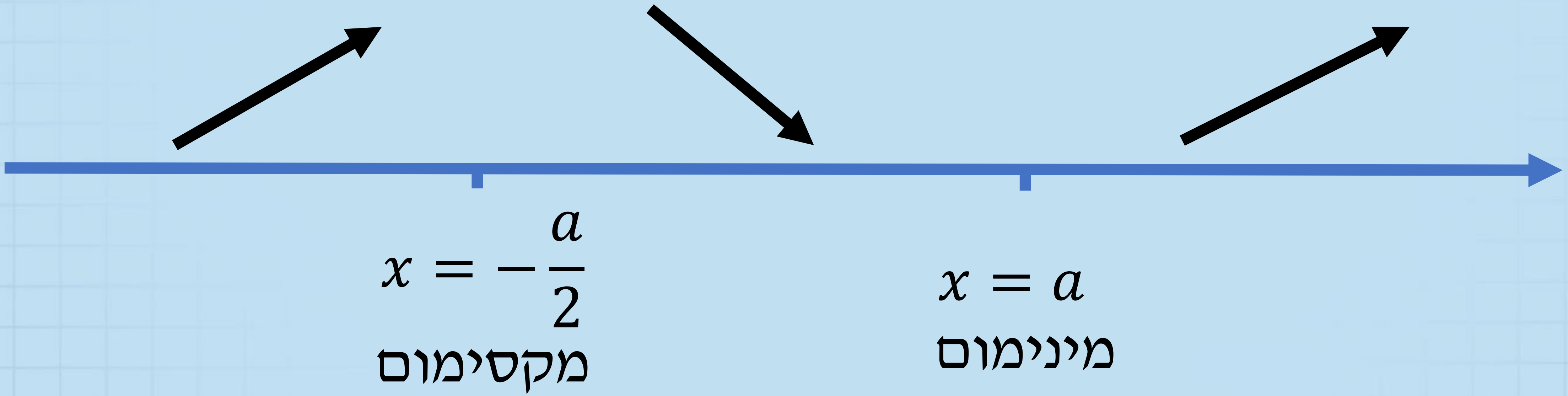
נתונה הפונקציה $y = 4x^3-3ax^2-6a^2x$, $a > 0$.

ב. הבע באמצעות a את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

<u>סעיף ב':</u>

נמצא את תחומי העלייה והירידה על סמך נקודות הקיצון שמצאנו בסעיף א'.



נתונה הפונקציה $y = 4x^3 - 3ax^2 - 6a^2x$, $a > 0$.

ב. הבע באמצעות a את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

תחומי עלייה: $x < -\frac{a}{2}$ או $x > a$

תחומי ירידה: $-\frac{a}{2} < x < a$

בהצלחה