פתרון תרגיל

עלייה וירידה– פולינומים

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 720, ת. 52

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

52) א. הוכח שהפונקציה $f(x) = x^3-2x^2+2x-4$ עולה לכל x.

ב. חשב את $f(2)$.

ג. מצא עפ"י סעיפים א' ו-ב' את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

א. הוכח שהפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$ עולה לכל x.

פתרון

<u>סעיף א':</u>

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

כדי להוכיח שהפונקציה עולה כל x, עלינו להוכיח כי: $f'(x) > 0$ לכל x.

יש להוכיח כי: $3x^2 - 4x + 2 > 0$ לכל x.

נפתור את האי שוויון הריבועי הנ"ל.

א. הוכח שהפונקציה $f(x) = x^3-2x^2+2x-4$ עולה לכל x.

פתרון

$$3x^2 - 4x + 2 > 0$$

נפתור על-ידי שרטוט מקורב של הפרבולה.

$a = 3 > 0$, ולכן הפרבולה ישרה.

נמצא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-x.

$$3x^2 - 4x + 2 = 0$$

אם נפעיל את נוסחת השורשים, נקבל: $\Delta = -8$

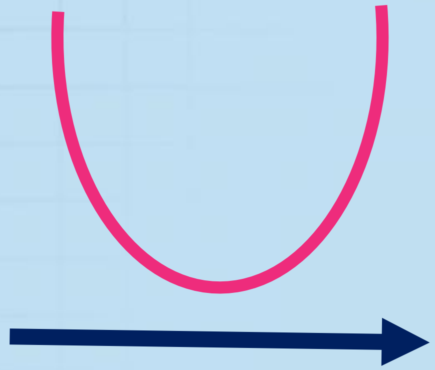
כלומר, המספר שמתחת לשורש הוא שלילי, ולכן אין לפרבולה נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

א. הוכח שהפונקציה $f(x) = x^3-2x^2+2x-4$ עולה לכל x.

פתרון

לפיכך, הפרבולה שלנו ישרה ואינה חותכת את ציר ה-x.

הסקיצה שלה היא זאת:



לכן, הפרבולה הזאת **חיובית לכל** x.

כלומר, הנגזרת של הפונקציה הנתונה **חיובית לכל** x, וכך הוכחנו שהפונקציה הנתונה **עולה כל** x.

ב. חשב את $f(2)$.
ג. מצא עפ"י סעיפים א' ו-ב' את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

פתרון

סעיף ב':

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$$

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = \boxed{0}$$

סעיף ג':

כעת ידוע שהפונקציה עולה לכל x, וגם כי: $f(2) = 0$

ג. מצא עפ"י סעיפים א' ו-ב' את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

פתרון

תזכורת:

פונקציה עולה בתחום – פונקציה $f(x)$ תיקרא עולה בתחום אם לכל x_1 ו-x_2 השייכים לתחום ומקיימים $x_1 < x_2$ מתקיים $f(x_1) < f(x_2)$.

הפונקציה שלנו עולה לכל x, ולכן לפי ההגדרה הנ"ל, מתקיים:

לכל x המקיים $x < 2$ מתקיים $f(x) < f(2)$

לכל x המקיים $x > 2$ מתקיים $f(x) > f(2)$

ג. מצא עפ״י סעיפים א׳ ו-ב׳ את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

פתרון

קיבלנו:

לכל x המקיים $x < 2$ מתקיים $f(x) < 0$

לכל x המקיים $x > 2$ מתקיים $f(x) > 0$

לסיכום:

חיובית: $x > 2$
שלילית: $x < 2$

בהצלחה