פתרון תרגיל

עלייה וירידה– פולינומים

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

581–481 , עמ' 717, ת. 2

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

2) נתונה הפונקציה $y = x^3 - x^2 - x$.

א. מצא את הנגזרת של הפונקציה.

ב. קבע לגבי כל אחת מהנקודות הבאות אם הפונקציה עולה או יורדת בה:

(1) $x = 0$ (2) $x = -1$ (3) $x = 1$ (4) $x = -\frac{1}{3}$

א. מצא את הנגזרת של הפונקציה.

פתרון

סעיף א'

$$y = x^3 - x^2 - x$$

$$y' = 3x^2 - 2x - 1$$

ב. קבע לגבי כל אחת מהנקודות הבאות אם הפונקציה עולה או יורדת בה:

(1) $x = 0$ (2) $x = -1$ (3) $x = 1$ (4) $x = -\frac{1}{3}$

פתרון

סעיף ב':

תזכורת:

פונקציה עולה בנקודה – פונקציה עולה בנקודה x_1 אם קיימת סביבה של x_1 שבה הפונקציה מוגדרת, כך לכל $x < x_1$ בסביבה מתקיים $f(x) < f(x_1)$ ולכל $x > x_1$ בסביבה מתקיים $f(x) > f(x_1)$.

פונקציה יורדת בנקודה – פונקציה יורדת בנקודה x_1 אם קיימת סביבה של x_1 שבה הפונקציה מוגדרת, כך לכל $x < x_1$ בסביבה מתקיים $f(x) > f(x_1)$ ולכל $x > x_1$ בסביבה מתקיים $f(x) < f(x_1)$.

ב. קבע לגבי כל אחת מהנקודות הבאות אם הפונקציה עולה או יורדת בה:

(1) $x = 0$ (2) $x = -1$ (3) $x = 1$ (4) $x = -\frac{1}{3}$

פתרון

$$y' = 3x^2 - 2x - 1$$

(1) $y'(0) = -1 < 0$

<u>מסקנה</u>: הפונקציה **יורדת** כאשר $x = 0$.

(2) $y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = 4 > 0$

<u>מסקנה</u>: הפונקציה **עולה** כאשר $x = -1$.

ב. קבע לגבי כל אחת מהנקודות הבאות אם הפונקציה עולה או יורדת בה:

(1) $x = 0$ (2) $x = -1$ (3) $x = 1$ (4) $x = -\frac{1}{3}$

פתרון

$$y' = 3x^2 - 2x - 1$$

$$y'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1 = 0 \quad (3)$$

תזכורת: כשהנגזרת הראשונה שווה לאפס בנקודה מסוימת, לא ניתן לדעת על-פי זה האם הפונקציה עולה בנקודה, יורדת בנקודה או לא עולה ולא יורדת.
לפיכך יש להמשיך לפי השלבים של מציאת נקודות קיצון.

נגזור את הפונקציה פעם שנייה.

$$y'' = 6x - 2$$

$$y''(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 4 > 0 \quad \rightarrow \quad \text{מינימום}$$

ב. קבע לגבי כל אחת מהנקודות הבאות אם הפונקציה עולה או יורדת בה:

(1) $x = 0$ (2) $x = -1$ (3) $x = 1$ (4) $x = -\frac{1}{3}$

פתרון

קיבלנו: $y'(1) = 0$ ו- $y''(1) > 0$.

לכן $x = 1$ היא נקודת מינימום של הפונקציה.

מסקנה: הפונקציה **לא עולה ולא יורדת** בנקודה $x = 1$.

(4) $$y'\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = 0$$

$$y'' = 6x - 2$$

$$y''\left(-\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = -4 < 0$$ **מקסימום**

ב. קבע לגבי כל אחת מהנקודות הבאות אם הפונקציה עולה או יורדת בה:

(1) $x = 0$ (2) $x = -1$ (3) $x = 1$ (4) $x = -\frac{1}{3}$

פתרון

מסקנה: הפונקציה **לא עולה ולא יורדת** בנקודה $x = -\frac{1}{3}$.

בהצלחה