הקנייה

עלייה וירידה–פולינומים

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 714–716

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

הקנייה

עלייה וירידה - פולינומים

עלייה וירידה בנקודה

את המושגים עלייה וירידה של פונקציה הכרנו כבר (ראה עמ׳ 640 וכן עמ׳ 716).
נביא את ההגדרות של עלייה וירידה בנקודה.

פונקציה עולה בנקודה – פונקציה עולה בנקודה x_1 אם קיימת סביבה של x_1 שבה הפונקציה מוגדרת, כך לכל $x < x_1$ בסביבה מתקיים $f(x) < f(x_1)$ ולכל $x > x_1$ בסביבה מתקיים $f(x) > f(x_1)$.

פונקציה יורדת בנקודה – פונקציה יורדת בנקודה x_1 אם קיימת סביבה של x_1 שבה הפונקציה מוגדרת, כך לכל $x < x_1$ בסביבה מתקיים $f(x) > f(x_1)$ ולכל $x > x_1$ בסביבה מתקיים $f(x) < f(x_1)$.

הקנייה

הערה: באופן כללי, אם פונקציה עולה (יורדת) בתחום מסויים אז היא עולה (יורדת) בכל נקודה בודדת בתחום. אם אין בתחום ההגדרה של הפונקציה "חורים" אז גם הטענה ההפוכה נכונה.

נזכיר את הקשר בין עלייה וירידה לשיפוע המשיק:

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה ואם הוא שלילי הפונקציה יורדת. (ראה עמ' 654).

כפי שכבר ראינו, שיפוע המשיק בנקודה שווה לערך הנגזרת בנקודה. נוכל אם כן לנסח משפט שבעזרתו ניתן למצוא האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה מסויימת.

הקנייה

משפט:

תהי x_1 נקודה פנימית בתחום של פונקציה $f(x)$ שבה הפונקציה גזירה.
א) אם $f'(x_1) > 0$ אז הפונקציה עולה בנקודה x_1.
ב) אם $f'(x_1) < 0$ אז הפונקציה יורדת בנקודה x_1.

הקנייה

הערות:

א) המשפט שהבאנו כאן מתייחס לנקודה x_1 בתנאי שהיא **נקודה פנימית** בתחום של הפונקציה. אם הנקודה x_1 היא **נקודת קצה** של תחום הפונקציה (כלומר הפונקציה מוגדרת בקטע **סגור** או **חצי סגור** או **בקרן**) אז הכלל **בספר זה** הוא שהפונקציה **לא עולה ולא יורדת** בנקודה x_1 אפילו אם הנגזרת שלה היא **חיובית** או **שלילית** בנקודה x_1. הסיבה היא שבנקודת קצה אין סביבה שבה הפונקציה מוגדרת. כמו כן בפונקציות שבהן אנו דנים (שהן לא הפונקציה הקבועה) **נקודת קצה** היא **נקודת קיצון** ולכן לא נתייחס אליה כאל נקודה שבה הפונקציה יכולה לעלות או לרדת. יחד עם זאת נדגיש, שאין זו טעות לומר שהפונקציה עולה (יורדת) בנקודת קצה אם הנגזרת בנקודה חיובית (שלילית).

הקנייה

ב) המשפט האחרון מאפשר לקבוע אם נקודה שבה **הנגזרת מתאפסת** היא נקודת קיצון ואפילו את סוג הקיצון. אם הנגזרת **משנה** את **סימנה** כאשר מתקדמים משמאל לימין אז הנקודה היא נקודת **קיצון**. אם השינוי הוא מ-(–) ל-(+), כלומר **מירידה לעלייה**, אז הנקודה היא נקודת **מינימום** ואם השינוי הוא מ-(+) ל-(–), כלומר **מעלייה לירידה**, אז הנקודה היא נקודת **מקסימום**. אם הנגזרת **לא** משנה את סימנה כאשר מתקדמים משמאל לימין אז הנקודה היא **לא** נקודת קיצון.

הקנייה

לדוגמא – נחזור לדוגמא א׳ שבעמ׳ 699 שם רצינו למצוא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = x^2-4x+5$. כפי שראינו, מתקיים $f'(x) = 2x-4$ ובנקודה $x = 2$ הנגזרת מתאפסת. אם נציב בנגזרת $x = 1$ נקבל $f'(1) = -2 < 0$, אם נציב בנגזרת $x = 3$ נקבל $f'(3) = 2 > 0$. כלומר, הפונקציה יורדת משמאל ל-$x = 2$ ועולה מימין ל-$x = 2$, לכן בנקודה $x = 2$ יש לפונקציה מינימום, כפי שקיבלנו בדוגמא.

הקנייה

ג) עוד נציין שהכיוון ההפוך של המשפט איננו נכון, כלומר אם הפונקציה $f(x)$ עולה בנקודה x_1 אז לא בהכרח מתקיים $f'(x_1) > 0$ וייתכן שמתקיים $f'(x_1) = 0$.

לדוגמא – הפונקציה $f(x) = x^3$ עולה בנקודה $x = 0$ למרות שמתקיים $f'(0) = 0$.
(ראה הערה ב' בעמ' 698).

בכל אופן, אם הפונקציה $f(x)$ עולה בנקודה x_1 אז ברור שלא מתקיים $f'(x_1) < 0$ כי אחרת $f(x)$ היתה יורדת ב-x_1. נוכל לנסח את **המשפט ההפוך**.

משפט:

תהי $f(x)$ פונקציה הגזירה בנקודה x_1.
א) אם הפונקציה $f(x)$ עולה בנקודה x_1 אז $f'(x_1) \geq 0$.
ב) אם הפונקציה $f(x)$ יורדת בנקודה x_1 אז $f'(x_1) \leq 0$.

הקנייה

דוגמא א':

נתונה הפונקציה $f(x) = 3x^4 - 8x^3$. מצא אם היא עולה או יורדת בנקודות הבאות:

א. $x = -1$ ב. $x = 2$ ג. $x = 0$

פתרון:

נגזור תחילה את הפונקציה ונקבל $f'(x) = 12x^3 - 24x^2$.

א. בנקודה $x = -1$ נקבל $f'(-1) = -36 < 0$, כלומר הפונקציה יורדת בנקודה זו.

ב. בנקודה $x = 2$ נקבל $f'(2) = 0$. במקרה זה אין אפשרות לדעת אם היא עולה או יורדת ולכן נגזור פעם שנייה ונקבל $f''(x) = 36x^2 - 48x$ נציב $x = 2$ ונקבל $f''(2) = 48 > 0$, כלומר זאת נקודת מינימום ולכן הפונקציה לא עולה ולא יורדת בנקודה זו.

הקנייה

ג. בנקודה $x = 0$ נקבל $f'(0) = 0$ וגם $f''(0) = 0$, כלומר אין אפשרות לדעת אם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה זו וכן אם זו נקודת קיצון. נחשב לכן את ערכי הפונקציה בנקודות $x = -1$, $x = 0$ ו-$x = 1$. נקבל $f(-1) = 11$, $f(0) = 0$ ו-$f(1) = -5$, כלומר $f(-1) > f(0) > f(1)$. המסקנה היא שהפונקציה יורדת ב-$x = 0$. (ראה ציור (4) בעמ' 699).

הקנייה

נביא את **סיכום השלבים** למציאת עלייה וירידה בנקודה.

השלבים למציאת עלייה וירידה של פונקציה בנקודה נתונה שעל הגרף הם:

א) גוזרים את הפונקציה ומוצאים את הנגזרת.

ב) מציבים את שיעור ה-x של הנקודה בנגזרת, אם הנגזרת חיובית הפונקציה עולה בנקודה ואם הנגזרת שלילית הפונקציה יורדת בנקודה.

ג) אם ההצבה גורמת לכך שהנגזרת שווה לאפס יש לפעול בהתאם לשלבים של מציאת נקודת קיצון. (ראה עמ' 701).

בהצלחה