הקנייה

נקודות פיתול שהמשיק
דרכן מקביל לציר ה– x

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

581–481 , עמ' 710

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

הקנייה

נקודות פיתול שהמשיך בהן מקביל לציר ה – x - פולינומים

כפי שכבר ראינו, ייתכן שהנגזרת של הפונקציה בנקודה מסויימת תהיה שווה לאפס אבל הנקודה לא תהיה נקודת קיצון. למעשה, נקודה כזאת היא **נקודת פיתול שהמשיק בה מקביל לציר ה-x** או מתלכד איתו. (ראה ציורים (3) ו-(4) בעמ' 699).

הערה: לפונקציה יכולה להיות גם נקודת פיתול שהמשיק בה לא מקביל לציר ה-x. (ראה הערה ג' בעמ' 654). יחד עם זאת, נדגיש מייד שאין בכוונתנו למצוא נקודות פיתול מכל סוג שהוא אלא רק את הנקודות שבהן **הנגזרת** שווה **לאפס אבל הן לא נקודות קיצון**.

הקנייה

דוגמא:

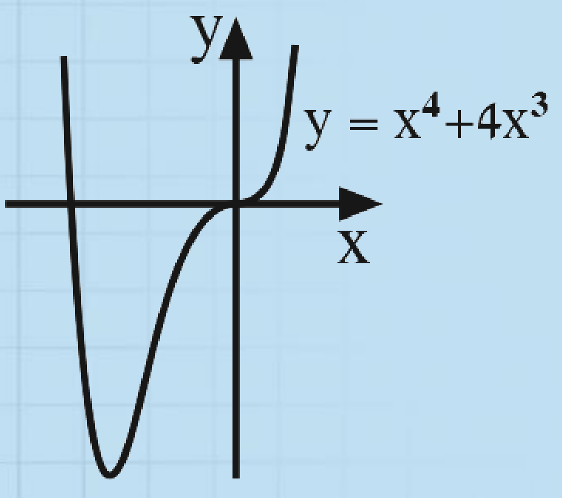
מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = x^4+4x^3$.

פתרון:

נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס $f'(x) = 4x^3+12x^2 = 0$. המשוואה המתקבלת היא $x^3+3x^2 = 0$. זאת משוואה ממעלה שלישית, כדי לפתור אותה ניעזר בפירוק לגורמים ונקבל $x^2(x+3) = 0$. אם מכפלה של שני מספרים שווה לאפס אז לפחות אחד מהם שווה לאפס. כלומר: או $x+3 = 0$ ואז $x = -3$ או $x^2 = 0$ ואז $x = 0$. נגזור פעם שנייה ונקבל $f''(x) = 12x^2+24x$. אם נציב $x = -3$ נקבל $f''(-3) = 36 > 0$ כלומר מינימום. לאחר חישוב ה-y נקבל שנקודת המינימום היא $(-3,-27)$. אם נציב $x = 0$ נקבל $f''(0) = 0$ ולכן **לא נוכל להיעזר בנגזרת השנייה** כדי לקבוע האם ב-$x = 0$ יש נקודת קיצון. נחשב, אם כן, את ערכי הפונקציה בנקודות $x = 1$, $x = 0$ ו-$x = -1$.

הקנייה

נקבל $f(1) = 5$, $f(0) = 0$ ו-$f(-1) = -3$, ז"א $f(-1) < f(0) < f(1)$. לכן בנקודה $x = 0$ **אין לפונקציה נקודת קיצון**. למעשה, בנקודה $x = 0$ יש לפונקציה **נקודת פיתול** שהמשיק בה מתלכד עם ציר ה-x ולכן **שיפועו אפס**. עפ"י התוצאות שקיבלנו הפונקציה **עולה** בנקודה $x = 0$. (ראה הערה ב׳ בעמ׳ 698).



בציור משמאל מתוארת סקיצה של גרף הפונקציה. ניתן לראות בציור את נקודת המינימום ואת הנקודה $(0,0)$ שבה אין לפונקציה נקודת קיצון אבל שיפוע המשיק בה (ציר ה-x) הוא 0.

הקנייה

הערה: ניתן לקבוע אם בנקודה $x = 0$ יש לפונקציה שבדוגמא הנ"ל נקודת קיצון גם ע"ס הערה ב' שבעמ' 715. אם נציב $x = 1$ ו-$x = -1$ בנגזרת $f'(x) = 4x^3+12x^2$ נקבל בהתאמה $f'(1) = 16 > 0$ וכן $f'(-1) = 8 > 0$. כלומר, עפ"י המוסבר בהערה ב' שבעמ' 715 הנגזרת **לא** משנה את סימנה כשמתקדמים משמאל לימין דרך הנקודה $x = 0$ ולכן זאת לא נקודת קיצון. למעשה הפונקציה **עולה** בנקודה $x = 0$ (ראה עמ' 698).

הקנייה

נוכל לסכם:

אם בנקודה מסויימת הנגזרת הראשונה וגם הנגזרת השנייה שוות לאפס אז צריך להציב בפונקציה או בנגזרת של הפונקציה ערכים משני הצדדים של הנקודה כדי לקבוע אם הנקודה היא נקודת קיצון או שהיא איננה נקודת קיצון. (הערכים צריכים להיות בסביבה של הנקודה שלא כוללת נקודות אחרות שבהן הנגזרת מתאפסת).

בהצלחה