פתרון תרגיל

נקודות קיצון עם פרמטרים– פולינומים

מתמטיקה (5–4 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 708, ת. 26

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה

26) נתונה הפונקציה: $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3a^2x$, $a > 0$.

הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

השאלה

<u>שלב 1</u> : **גוזרים** את הפונקציה פעם ראשונה ומשווים את הנגזרת לאפס.

$$y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3a^2x$$

$$y' = x^2 + 2ax - 3a^2$$

$$x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$$

<u>שלב 2</u> : **מוצאים** את פתרונות המשוואה המתקבלת.

נשתמש כאן בנוסחת השורשים.

נתונה הפונקציה: $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3a^2x$, $a > 0$.

הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$a = 1 \qquad b = 2a \qquad c = -3a^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3a^2)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 12a^2}}{2}$$

נתונה הפונקציה: $y = \frac{1}{3}x^3+ax^2-3a^2x$, $a > 0$.

הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$x_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{16a^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2a \pm 4a}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2a + 4a}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2a - 4a}{2}$$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = -3a$$

נתונה הפונקציה: $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3a^2x$, $a > 0$.

הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

שלב 3: **גוזרים** את הפונקציה פעם שנייה

$$y' = x^2 + 2ax - 3a^2$$

$$y'' = 2x + 2a$$

שלב 4: **מציבים** את כל אחד משיעורי ה-x שבהם הנגזרת מתאפסת בנגזרת השנייה.

קובעים האם כל נקודה היא **מינימום** או **מקסימום** על-פי **הסימן** של הנגזרת השנייה

נתונה הפונקציה: $y=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3a^2x$, $a>0$.

הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$y''=2x+2a$$

$$y''(a)=2a+2a=4a$$

נתון כי: $a>0$, ולכן $y''(a)>0$, **ולכן מדובר בנקודת מינימום.**

$$y''(-3a)=-6a+2a=-4a<0\rightarrow$$ **מקסימום**

<u>שלב 5</u> : **מציבים** כל אחד משיעורי ה-x הרלבנטיים בפונקציה המקורית כדי למצוא את שיעורי ה-y המתאימים.

נתונה הפונקציה: $y=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3a^2x$, $a>0$.

הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$y=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3a^2x$$

$$x=a\rightarrow y=\frac{1}{3}a^3+a\cdot a^2-3a^2\cdot a=\frac{1}{3}a^3+a^3-3a^3=-\frac{5}{3}a^3$$

$$x=-3a\rightarrow y=\frac{1}{3}\cdot(-3a)^3+a\cdot(-3a)^2-3a^2\cdot(-3a)$$

$$y=-9a^3+9a^3+9a^3$$

$$y=9a^3$$

נתונה הפונקציה: $y = \frac{1}{3}x^3+ax^2-3a^2x$, $a > 0$.

הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

לסיכום:

מינימום $\left(a, -\frac{5}{3}a^3\right)$

מקסימום $\left(-3a, 9a^3\right)$

בהצלחה

בהצלחה