פתרון תרגיל

נקודות קיצון עם פרמטרים

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 706, ת. 7

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

7) לפונקציה $y = ax^3 - 2x^2 + 5x$ יש נקודת קיצון כאשר $x = -5$.

א. חשב את ערכו של a וקבע את סוג נקודת הקיצון.

ב. מצא את נקודת הקיצון השנייה של הפונקציה.

א. חשב את ערכו של a וקבע את סוג נקודת הקיצון.

פתרון

סעיף א':

תזכורת:

גוזרים לפי x ומתייחסים ל- a כאל מספר קבוע.

$$y = ax^3 - 2x^2 + 5x$$

$$y' = 3ax^2 - 4x + 5$$

נתון שב- $x = -5$ יש לפונקציה נקודת קיצון.

נציב בנגזרת $x = -5$ ונשווה את הנגזרת לאפס.

א. חשב את ערכו של a וקבע את סוג נקודת הקיצון.

פתרון

$$y' = 3ax^2 - 4x + 5$$

$$3a \cdot (-5)^2 - 4 \cdot (-5) + 5 = 0$$

$$75a + 25 = 0$$

$$75a = -25$$

$$\boxed{a = -\frac{1}{3}}$$

א. חשב את ערכו של a וקבע את סוג נקודת הקיצון.

פתרון

כדי לקבוע את **סוג נקודת הקיצון**, יש לגזור את הפונקציה **פעם שנייה**.

נציב $a=-\frac{1}{3}$ בנגזרת הראשונה, ונגזור.

$$y'=3ax^2-4x+5$$

$$a=-\frac{1}{3}\ \rightarrow\ y'=-x^2-4x+5$$

$$y''=-2x-4$$

$y''(-5)=(-2)\cdot(-5)-4=6\ >0$ מינימום

ב. מצא את נקודת הקיצון השנייה של הפונקציה.

פתרון

<u>סעיף ב':</u>

כדי למצוא את נקודת הקיצון השנייה, נשווה את הנגזרת של הפונקציה (לאחר הצבת הפרמטר) לאפס, ונפתור את המשוואה המתקבלת.

$$y' = -x^2 - 4x - 5$$

$$-x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -5$$

ב. מצא את נקודת הקיצון השנייה של הפונקציה.

פתרון

לכן, נקודת הקיצון השנייה מתקבלת כאשר $x = 1$.

נציב בנגזרת השנייה כדי לקבוע את סוג הקיצון.

$$y'' = -2x - 4$$

$$y''(1) = -2 \cdot 1 - 4 = -6 \; < 0$$ מקסימום

ב.   מצא את נקודת הקיצון השנייה של הפונקציה.

פתרון

נחזור לפונקציה המקורית כדי למצוא את שיעור ה- y המתאים.

$$y = ax^3 - 2x^2 + 5x$$

$$a = -\frac{1}{3} \rightarrow y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x$$

$$x = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{3} - 2 + 5 = 2\frac{2}{3}$$

ב. מצא את נקודת הקיצון השנייה של הפונקציה.

פתרון

לסיכום:

$\boxed{\left(1, 2\frac{2}{3}\right) \text{ מקסימום}}$

בהצלחה