הקנייה

הנגזרת של פונקציה בנקודה

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581, עמ' 656–658

הקנייה

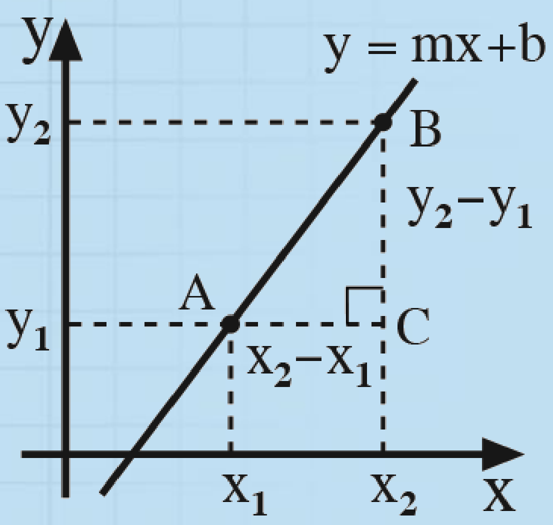
הנגזרת של פונקציה בנקודה

נחשב עכשיו את השיפוע של גרף של פונקציה שאיננה דווקא קו ישר. כפי שראינו בסעיף הקודם, שיפוע גרף של פונקציה בנקודה הוא **שיפוע המשיק** לגרף הפונקציה בנקודה. נגדיר:

הנגזרת של פונקציה בנקודה – ערך הנגזרת של פונקציה בנקודה שעל גרף הפונקציה הוא שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה.

אם $f(x)$ היא הפונקציה ו-x_1 זהו שיעור ה-x של הנקודה שעל הגרף אז $f'(x_1)$ **מסמן את הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1.** סימון נוסף לנגזרת הוא y'.

הקנייה



המשמעות הגיאומטרית של השיפוע

לפני שנביא דוגמא שבעזרתה נסביר את מושג הנגזרת,

נזכיר (ראה עמ' 55) **שהשיפוע** m של ישר $y = mx+b$ העובר דרך **שתי נקודות** $A(x_1, y_1)$ ו-$B(x_2, y_2)$ הוא $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. יחס זה **תלוי** רק **ב-m** **ואינו תלוי** בבחירת **שתי הנקודות** על הישר.

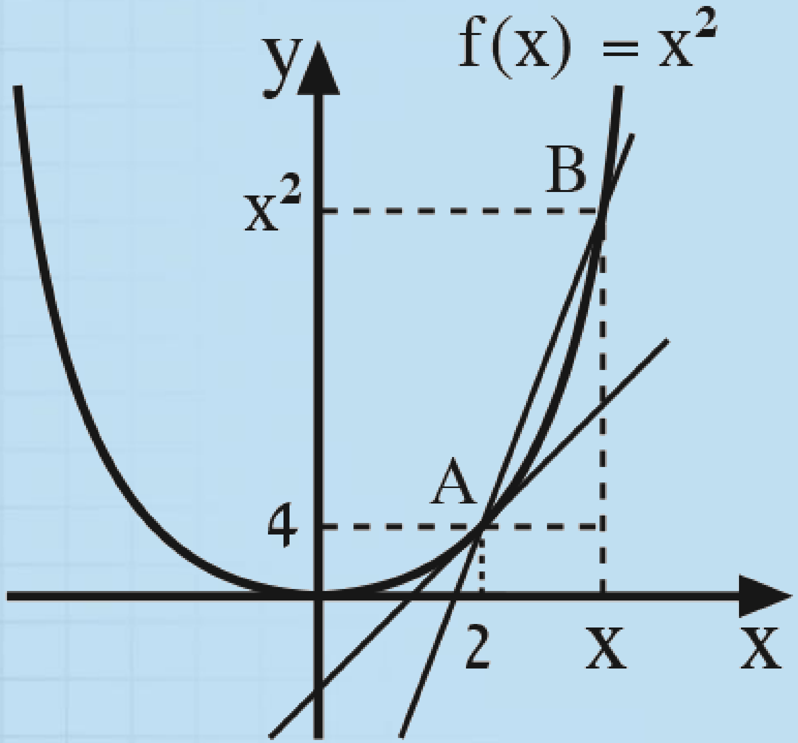
המשמעות הגיאומטרית – המשולש ABC שבציור הוא **ישר זווית** $(AC \perp BC)$ ומתקיים: $m = \frac{BC}{AC}$. נזכיר גם שהקשר הוא $\mathbf{tg\alpha = m}$ כאשר α היא הזווית שהישר יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x. (ראה עמ' 578).

תרגיל לדוגמה

דוגמא:

חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2$

בנקודה $A(2,4)$ שעל גרף הפונקציה.

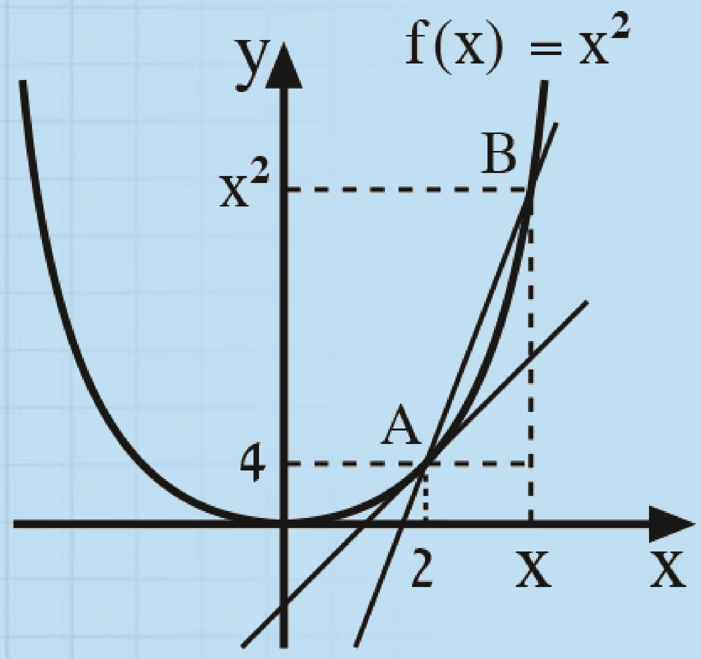


תרגיל לדוגמה

פתרון:

ברצוננו לחשב את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $A(2,4)$. נעביר ישר דרך הנקודה $A(2,4)$ ודרך נקודה נוספת B שעל הגרף, הנמצאת מימין ל-A. (קנה המידה על הצירים איננו שווה כדי שהציור יהיה יותר ברור).

נסמן את השיעור הראשון של הנקודה B ב-x ואז השיעור השני של B הוא x^2 (כי B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)=x^2$). שיפוע הישר העובר דרך A ו-B



תרגיל לדוגמה

הוא $\frac{x^2-4}{x-2} = m$. (ההפרש שבין שיעורי ה-y לחלק להפרש שבין שיעורי ה-x).

אם הנקודה B נמצאת משמאל ל-A נקבל לשיפוע $\frac{4-x^2}{2-x} = m$, כלומר בשני המקרים

השיפוע שווה. ניתן עכשיו לנקודה B **להתקרב** ל-A על גרף הפונקציה, כלומר **שיעור**

ה-x של B מתקרב **ל-2 מימין** (דרך מספרים הגדולים מ-2) **ומשמאל** (דרך מספרים

הקטנים מ-2). הטבלאות הבאות נותנות את התוצאות לגבי השיפוע:

תרגיל לדוגמה

x מתקרב ל-2 מימין:

x	2.3	2.2	2.1	2.01
$\frac{x^2-4}{x-2}$	4.3	4.2	4.1	4.01

x מתקרב ל-2 משמאל:

x	1.7	1.8	1.9	1.99
$\frac{4-x^2}{2-x}$	3.7	3.8	3.9	3.99

כלומר, כאשר x מתקרב ל-2 **שיפוע החותך AB מתקרב ל-4**. במילים אחרות: אם x מתקרב ל-2 **שיפוע המשיק** מתקרב ל-4. כלומר **ערך הנגזרת** של הפונקציה $f(x) = x^2$ בנקודה $x = 2$ הוא 4. רושמים זאת כך: $f'(2) = 4$.

תרגיל לדוגמה

הערה:

ראינו שכאשר x שואף ל-2 ערך הביטוי $\frac{x^2-4}{x-2}$ שואף ל-4. מקובל לסמן זאת כך $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$. הסימן lim הוא קיצור של limes שפירושו **גבול**. בדוגמא חישבנו את הגבול ע"י הצבת ערכים במקום x. כדי לחשב את הגבול הנ"ל **מבלי להציב** מספר ערכים ניעזר **בפירוק לגורמים וצמצום** ונקבל: $\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$.

אם x שואף ל-2 נקבל: $\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$. בדרך זו ניתן לחשב את הנגזרת של פונקציה בנקודה נתונה. נסביר את החשיבות של חישוב זה:

הביטוי $\frac{x^2-4}{x-2}$ אינו מוגדר עבור $x=2$. אם נציב בו $x=2$ נקבל את הביטוי $\frac{0}{0}$ שהוא **חסר משמעות**. כדי להתגבר על בעיה זו הסתמכנו על כך שלכל $x\neq 2$ מתקיים $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$. הביטוי $x+2$ מוגדר עבור $x=2$ ולכן ניתן לחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 2}(x+2)$ פשוט ע"י **הצבת** $x=2$.

בהצלחה