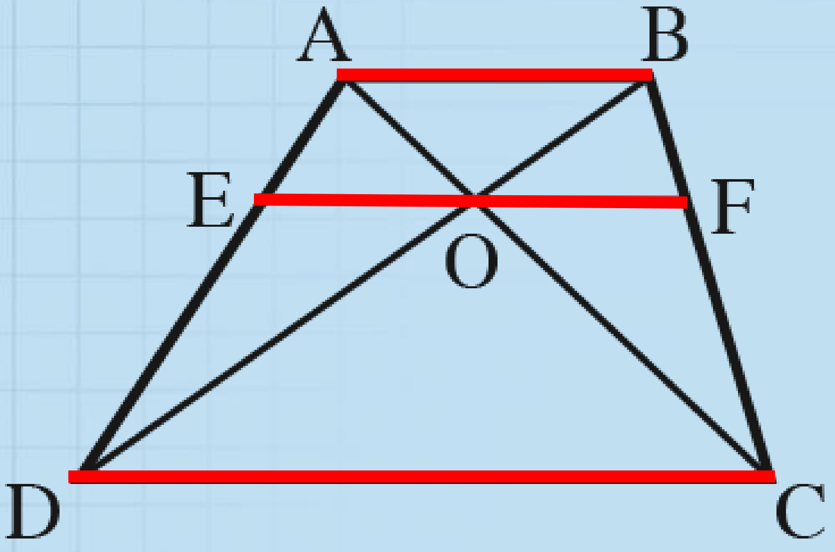
פתרון תרגיל
תאלס והרחבותיו

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

581–481 , עמ' 307, ת.17

המצגת נערכה ע"י תומר פרבר

השאלה



17) בטרפז $ABCD$ שבו $AB \parallel DC$ האלכסונים נחתכים בנקודה O. הנקודות E ו-F נמצאות על השוקיים כך שהקטע EF עובר דרך O והוא מקביל לבסיסי הטרפז.

א. הוכח: $EO = FO$.

ב. נסמן: $AB = a$, $DC = b$. הוכח: $EF = \frac{2ab}{a+b}$.

<u>ניתוח הבעיה סעיף א':</u>

$\boldsymbol{EF}$ מקביל לבסיסי הטרפז, מה שמרמז על תאלס.

מבקשים שנוכיח ש- $\boldsymbol{EO = OF}$, אך כל אחד במשולש אחר. אם נצליח למצוא פרופורציה משותפת לשני המשולשים, סיימנו.

רמז, אם נמשיך את צלעות הטרפז מעלה, תיווצר זווית שעל שוקיה הוקצו מקבילים.

א. הוכח: EO = FO.

פתרון

א) נתון: בסיסי הטרפז $EF \parallel$, לכן ב-ΔADC $EO \parallel DC$

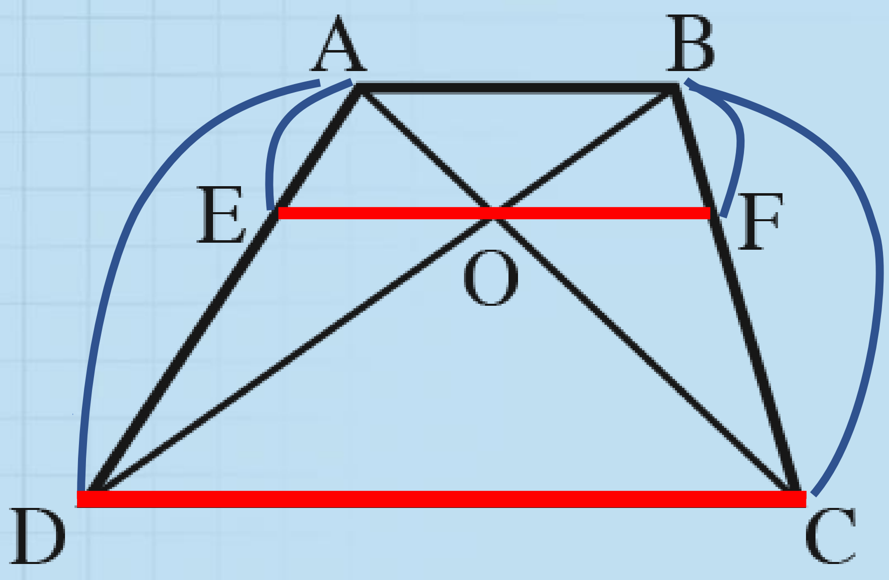
$$\frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD}$$ עפ"י תאלס מורחב

ב-ΔBDC $OF \parallel DC$

$$\frac{OF}{DC} = \frac{BF}{BC}$$ עפ"י תאלס מורחב

אבל: $$\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AD}$$ תאלס על שוקי הטרפז

$$\frac{EO}{DC} = \frac{OF}{DC}$$ כלל מעבר

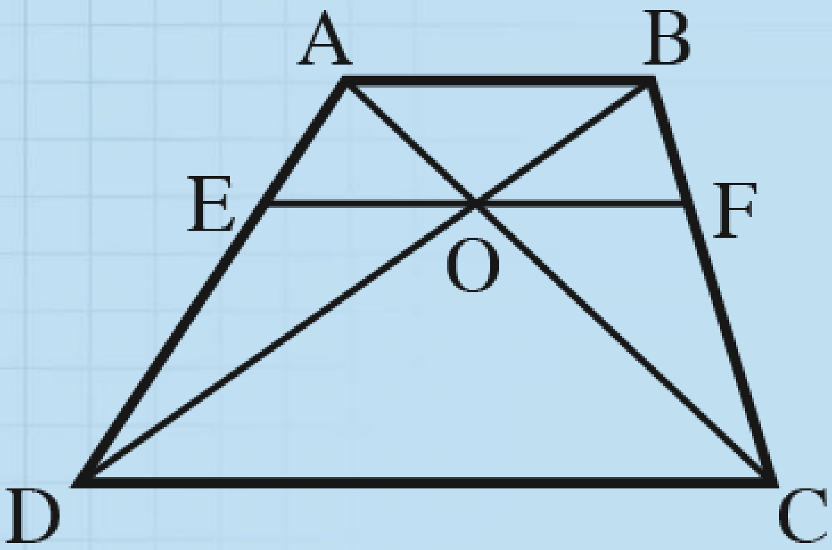


$$EO = OF$$

אם שני שברים שווים זה לזה ושווים מכניהם, אז מוניהם שווים.

מ.ש.ל. א'

השאלה



17) בטרפז ABCD שבו $AB \parallel DC$ האלכסונים נחתכים בנקודה O. הנקודות E ו-F נמצאות על השוקיים כך שהקטע EF עובר דרך O והוא מקביל לבסיסי הטרפז.

א. הוכח: $EO = FO$.

ב. נסמן: $AB = a$, $DC = b$. הוכח: $EF = \frac{2ab}{a+b}$.

<u>ניתוח הבעיה סעיף ב':</u>

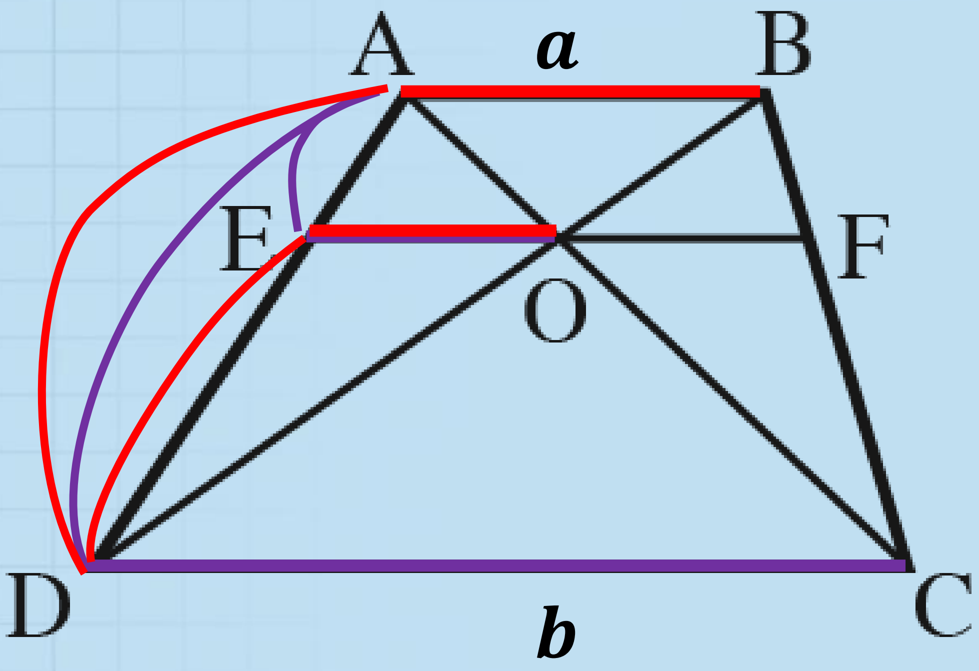
הוכחנו ש- $EO = OF$, אז אם נמצא קשר בין אחד מהם לאורכי הבסיסים הנתונים, נוכל לכפול אותו ב-2 לקבלת אורך EF.

EO נמצא ב-2 משולשים: ב-ΔADC בו $DC = b$ וב- ΔDAB בו $AB = a$.

נחפש הקשר בין שני המשולשים האלה.

ב. נסמן: $AB = a$, $DC = b$. הוכח: $EF = \frac{2ab}{a+b}$.

פתרון



ב- ΔADC $EO \parallel DC$ נתון

$\frac{AE}{AD} = \frac{EO}{DC} = \frac{EO}{b}$ עפ"י תאלס מורחב

ב- ΔDAB $EO \parallel AB$ נתון

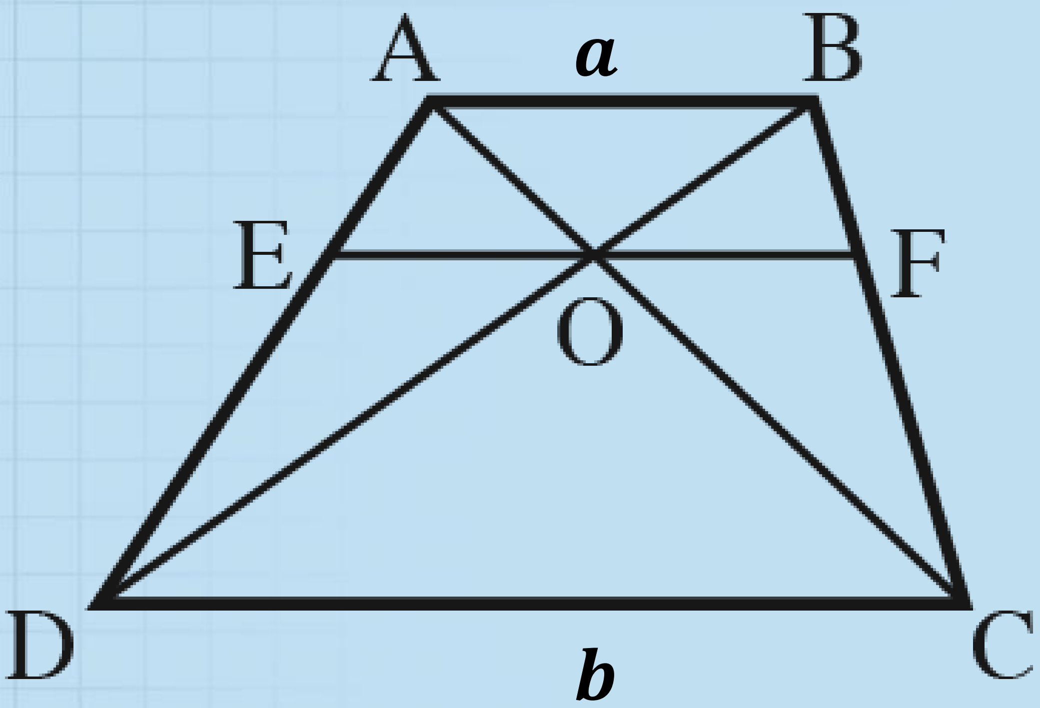
$\frac{DE}{AD} = \frac{EO}{AB} = \frac{EO}{a}$ עפ"י תאלס מורחב

$\frac{AE}{AD} + \frac{DE}{AD} = \frac{EO}{b} + \frac{EO}{a}$ חיבור גדלים שווים

$AE + DE = AD$ חיבור קטעים

ב. נסמן: $AB = a$, $DC = b$. הוכח: $EF = \frac{2ab}{a+b}$.

פתרון



$$\frac{AD}{AD} = \frac{EO}{b} + \frac{EO}{a}$$

$$1 = \frac{aEO + bEO}{ab} = \frac{EO(a+b)}{ab}$$

$$ab = EO(a+b)$$

$$\frac{ab}{a+b} = EO$$

$$FE = 2EO = \frac{2ab}{a+b}$$

מ.ש.ל. ב'

בהצלחה