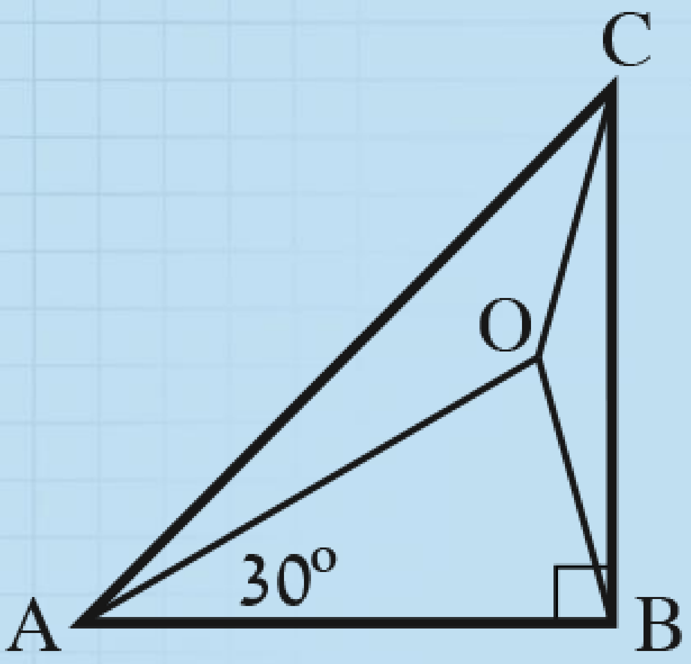
פתרון תרגיל

משולש ישר זווית
ומשולש שווה שוקיים

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

581–481 , עמ' 278, ת. 13

השאלה



★ 13) המשולש ABC הוא ישר זווית ושווה שוקיים $(\sphericalangle ABC = 90^\circ)$.

נתון: $\sphericalangle BAO = 30^\circ$, $AO = AB$.

הוכח: $BO = CO$.

(**רמז:** בנה משולש שווה צלעות במקום מתאים).

<u>ניתוח הבעיה:</u>

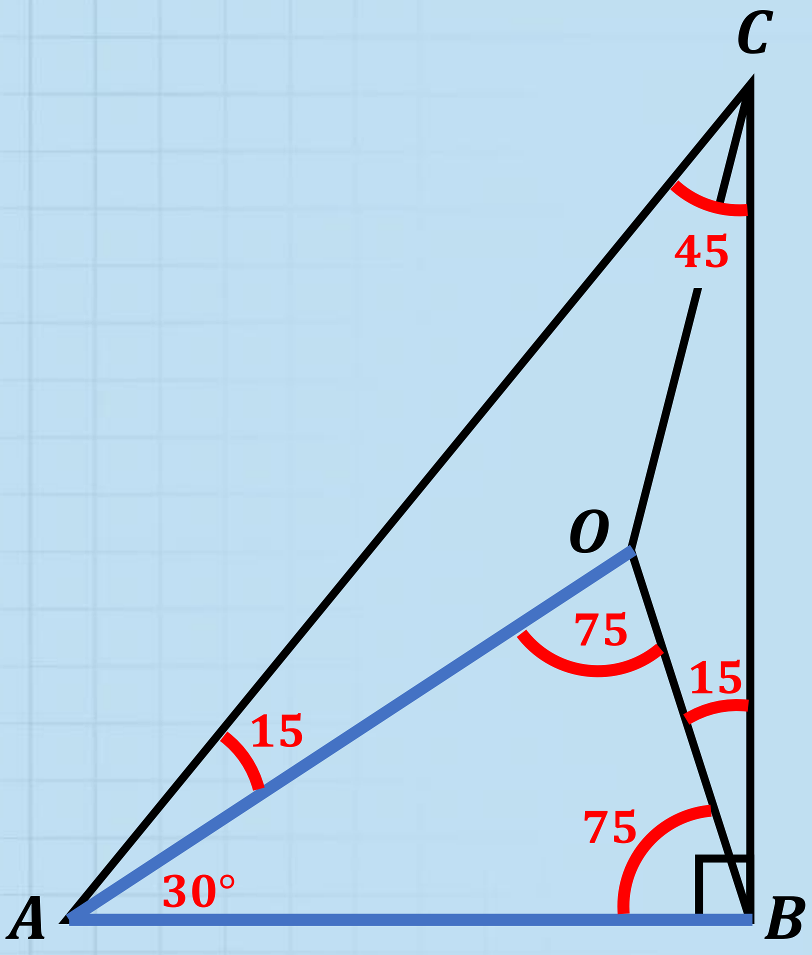
המשולש הוא ישר זווית ושווה שוקיים – זוויותיו ידועות.

נתונה זווית $\mathbf{30^\circ}$, אשר מרמזת על משפט.

צ"ל $\mathbf{BO = CO}$, ז"א, אם נוכיח, שהמשולש $\mathbf{\Delta BOC}$ שווה שוקיים, אז סיימנו.

הערה: אם לאחר, שהכנסנו את כל הנתונים והסקנו את כל המסקנות מהם, עדין לא התקדמנו, כדי לשקול בניית עזר.

הוכח: $BO = CO$.



פתרון

נתון $AB = BC$, $\sphericalangle CBA = 90°$

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC = \frac{180 - 90}{2} = 45°$$

נתון $AO = AB$

ב- ΔAOB

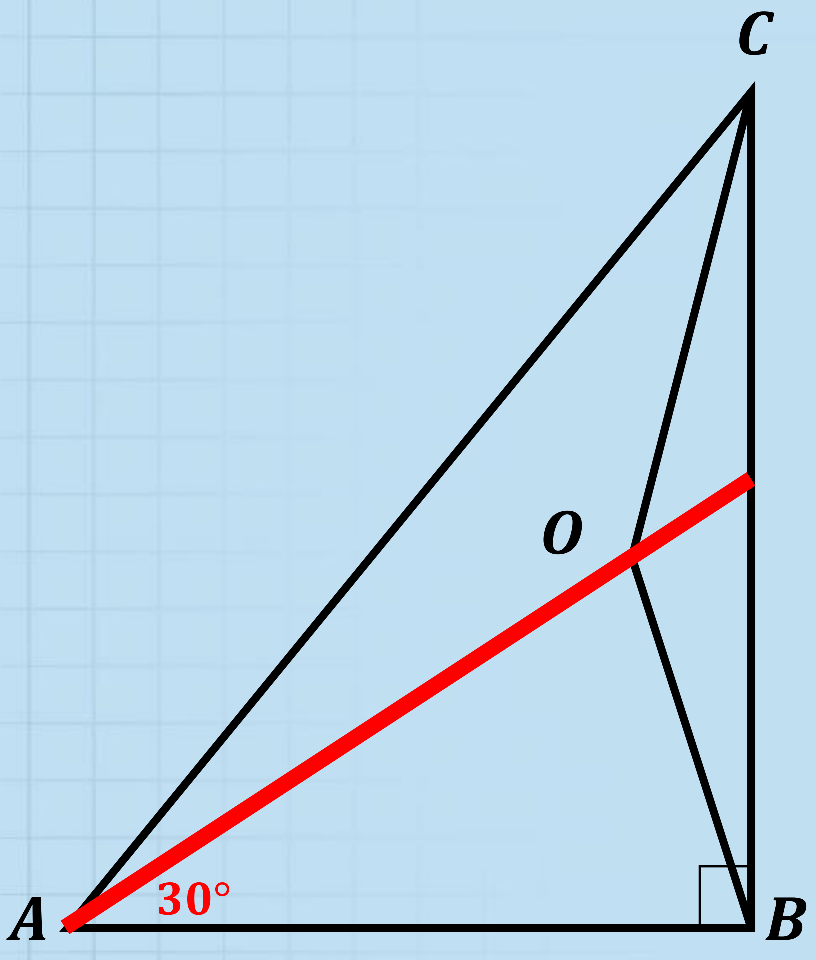
$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ABO = \frac{180 - 30}{2} = 75°$$

$$\sphericalangle CBO = 90 - \sphericalangle OBA = 90 - 75 = 15°$$

$$\sphericalangle CAO = 45 - \sphericalangle OAB = 45 - 30 = 15°$$

הוכח: $BO = CO$.

פתרון



כל הנתונים לא קידמו אותנו, אז נשקול בניית עזר. אך איזו?

אנו במשולש ישר זווית ויש בתוכו זווית של $30°$

זה מרמז על המשפט:

אם במשולש ישר זווית יש זווית $30°$, אז הניצב מולה שווה

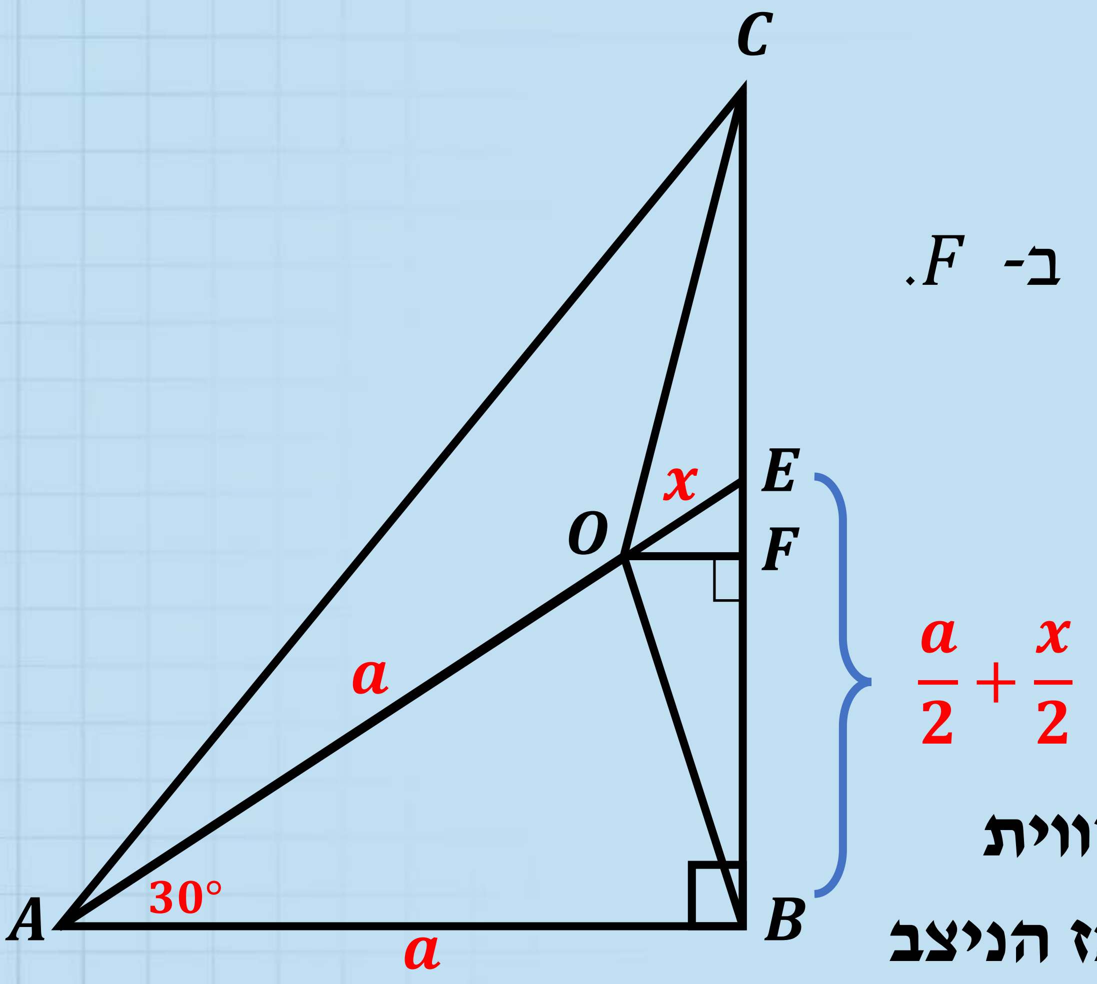
למחצית היתר.

הזווית $30°$ אינה במשולש ישר זווית, אך אם נמשיך

את AO עד ל- BC נקבל משולש ישר זווית.

הוכח: $BO = CO$.

פתרון



בניית עזר: נמשיך את AO עד לנקודה E.

מהנקודה O נוריד אנך ל- BC שיחתוך את BC ב- F.

נסמן: $AB = AO = a$, $OE = x$

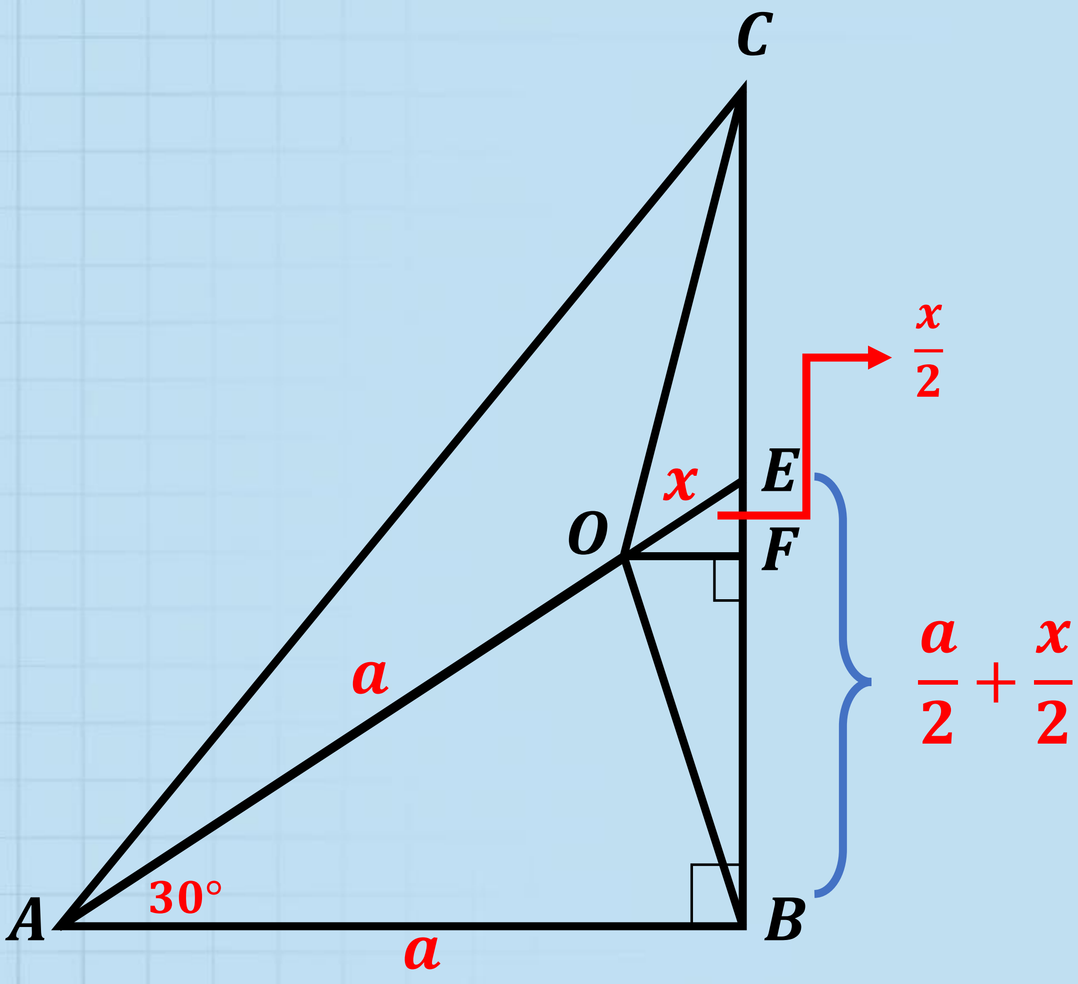
ולכן $AE = a + x$ סכום קטעים

ב- ΔAEB, $\angle B = 90^\circ$ **ו-** $\angle EAB = 30^\circ$

$BE = \frac{AE}{2} = \frac{a+x}{2} = \frac{a}{2}+\frac{x}{2}$ **אם במשולש ישר זווית יש זווית של 30°, אז הניצב שמולה שווה מחצית היתר**

הוכח: $BO = CO$.

פתרון



ב- ΔEOF, $\sphericalangle F = 90^\circ$ — בניית העזר אנך

$OF \parallel AB$ — שני ישרים, שמאונכים לישר שלישי, מקבילים זה לזה

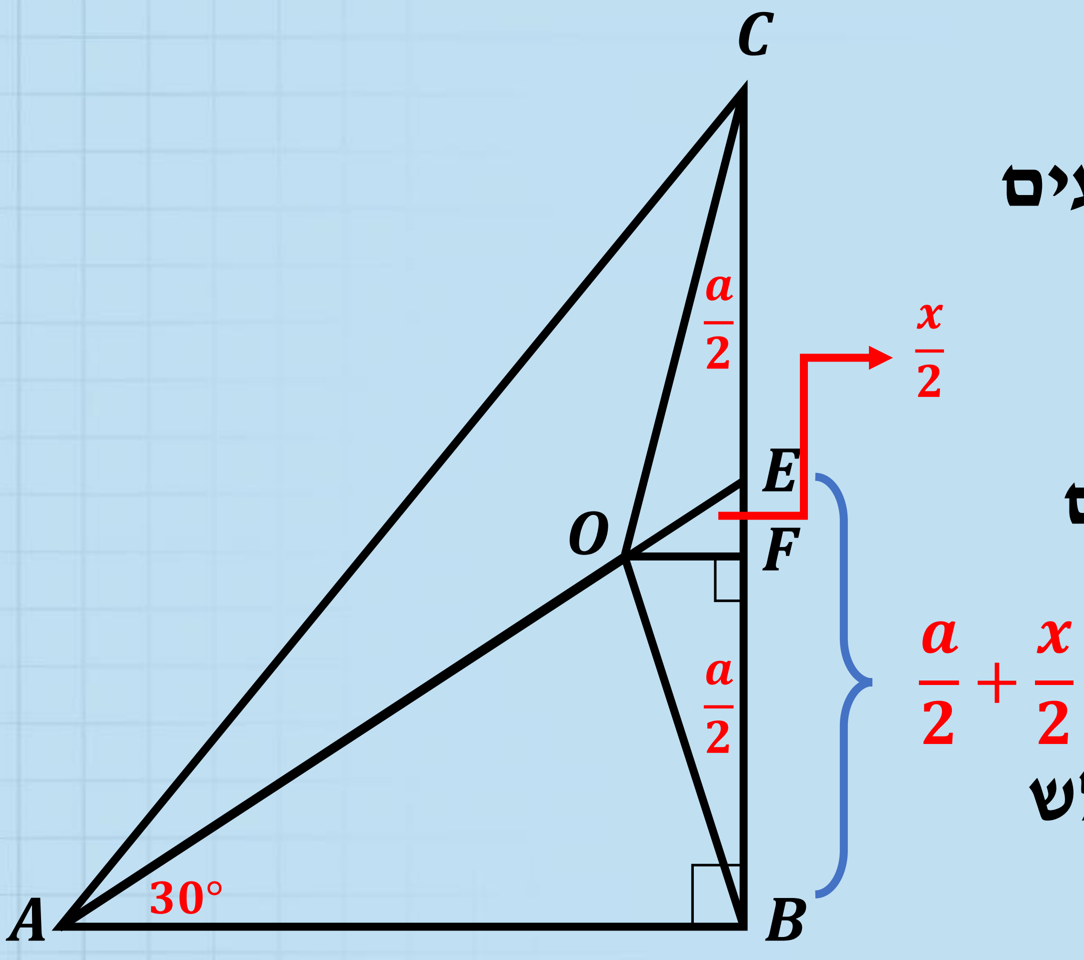
$\sphericalangle EOF = \sphericalangle EAB = 30^\circ$ — זוויות מתאימות שוות בין מקבילים

ב- ΔEOF, $\sphericalangle F = 90^\circ$ ו- $\sphericalangle EOF = 30^\circ$

$EF = \frac{OE}{2} = \frac{x}{2}$ — אם במשולש ישר זווית יש זווית של 30°, אז הניצב שמולה שווה מחצית היתר

הוכח: $BO = CO$.

פתרון



$FB = EB - EF = \frac{a}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = \frac{a}{2}$ חיסור קטעים

אבל $AB = BC = a$ סימון

$CF = BC - BF = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ הפרש קטעים

ולכן $FB = CF$ ו- OF תיכון

המשולש ΔBOC שווה שוקיים: אם תיכון במשולש הוא גם גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים

$OC = OB$ מ.ש.ל.

בהצלחה