הקנייה

משוואות מהצורה $sinx = a$

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

581–481 , עמ' 590–592

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

הקנייה

משוואות טריגונומטריות

החל מסעיף זה נדון בפתרון משוואות טריגונומטריות. משוואות שבהן מופיעות פונקציות טריגונומטריות המכילות נעלם נקראות **משוואות טריגונומטריות**. במשוואות נסמן את הזוית ב-x ולא ב-α. בשלב זה נפתור את המשוואות רק **במעלות** ולא ברדיאנים. נדון תחילה בפתרון של משוואות מהצורה $\sin x = a$.

מציאת זויות עפ"י הסינוס שלהן

מציאת זוית עפ"י הערך של פונקציה טריגונומטרית, כאשר הזויות הן **לא** בהכרח חדות, היא יותר קשה מאשר מציאת ערך הפונקציה עפ"י הזוית. הסיבה היא, שלהבדיל מהמקרה של זויות חדות, שם לכל ערך של פונקציה טריגונומטרית היתה מתאימה זוית אחת ויחידה, כאן המצב הוא שונה **ולכל ערך** של פונקציה טריגונומטרית מתאימות **זויות רבות** ולמעשה **אינסוף זויות**.

הקנייה

משוואות מהצורה $\sin x = a$

כדי למצוא את כל הפתרונות של משוואה מהצורה $\sin x = a$ ניעזר בשתי הזהויות הבאות שכבר הכרנו:

(1) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ (2) $\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin\alpha$

באמצעות מחשבון, נביא את המשוואה לצורה

$$\sin x = \sin \alpha$$

הקנייה

מהזהות **הראשונה** נקבל שאם זוית α היא **פתרון** של המשוואה $\sin x = \sin\alpha$ אז גם הזוית $180^{o} - \alpha$ היא **פתרון** של המשוואה.

מהזהות **השנייה** נקבל שאם זוית α היא **פתרון** של המשוואה $\sin x = \sin\alpha$ אז גם זויות המתקבלות ע"י **הוספת** כפולות שלמות של 360^{o} לזוית α או **חיסור** כפולות שלמות של 360^{o} מהזוית α הן **פתרונות** של המשוואה.

הקנייה

הפתרונות הכלליים (המחזוריים):

את כל הפתרונות רושמים בעזרת האות K כאשר K מייצגת **מספר שלם**. הפתרונות שרשומים בצורה כזאת נקראים **הפתרונות הכלליים** או **המחזוריים**. כלומר, אם α הוא פתרון של המשוואה אז פתרון כללי הוא $\alpha+360^{o}K$ כאשר K מספר שלם. כלומר $K = \dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots$.

פתרונות יסודיים של משוואה מהצורה $\boldsymbol{\sin x = \sin \alpha}$

$$\boldsymbol{x_2} = (180^0 - \alpha) + 360^0 k$$

$$\boldsymbol{x_1} = \alpha + 360^0 k$$

$$\boldsymbol{k} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

הקנייה

דוגמא א':

נתונה המשוואה $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

א. מצא את הפתרונות הכלליים של המשוואה.

ב. מצא את הפתרונות של המשוואה בתחום $0^{o} \le x \le 720^{o}$.

הקנייה

נתונה המשוואה $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. א. מצא את הפתרונות הכלליים של המשוואה.

באמצעות מחשבון, נביא את המשוואה הנתונה לתבנית הפתרון:

$$sin\, x = \frac{\sqrt{3}}{2} = sin\, 60°$$

כלומר, במקרה שלנו, $\alpha = 60°$

$$x_1 = 60° + 360^0 k$$

$$x_2 = (180^0 - 60°) + 360^0 k = 120° + 360° k$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

הקנייה

נתונה המשוואה $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ב. מצא את הפתרונות של המשוואה בתחום $0^\circ \le x \le 720^\circ$.

$$x_1 = 60^\circ + 360^0 k$$

$$x_2 = 120^\circ + 360^\circ k$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$\boldsymbol{k = 0}$: $x_1 = 60^\circ$

$\boldsymbol{k = 1}$: $x_1 = 60^\circ + 360^0 \cdot 1 = 420^\circ$

$\boldsymbol{k = 0}$: $x_2 = 120^\circ$

$\boldsymbol{k = 1}$: $x_2 = 120^\circ + 360^0 \cdot 1 = 480^\circ$

הקנייה

השלבים בפתרון המשוואה $\sin x = a$:

א) מוצאים בעזרת מחשבון את הפתרון היסודי α שמקיים $\sin\alpha = a$.

ב) מוצאים פתרון יסודי נוסף שהוא $180^{\circ} - \alpha$.

ג) מוצאים $360^{\circ}K$ לכל אחד מהפתרונות היסודיים ומקבלים את הפתרונות הכלליים:

$$\boxed{x_1 = \alpha + 360^{\circ}K}$$

$$\boxed{x_2 = 180^{\circ} - \alpha + 360^{\circ}K}$$

הקנייה

השלבים בפתרון המשוואה $\sin x = a$:

$$x_1 = \alpha + 360^\circ K$$

$$x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ K$$

ד) כדי למצוא את הפתרונות בתחום נתון מציבים מספר ערכים שלמים במקום K. ($K = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$). מבין הפתרונות המתקבלים בוחרים את אלה שנמצאים בתחום הנתון.

בהצלחה