פתרון תרגיל

נפחים – פרמטרים, משיק, תרגילים שונים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 453, ת. 6

המצגת נערכה ע"י אבי בן נעים

השאלה

6) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=\frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+24}}$. המקסימום המוחלט של הפונקציה הוא 5.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. שרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציה $f(x)$ ושל הפונקציה $g(x)=\sqrt{ax}$, $a>0$.

ג. הגרפים נחתכים בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 4. חשב את נפח הגוף המתקבל מסיבוב סביב ציר ה-x של השטח, ברביע הראשון, שמוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות וציר: (1) ה-x. (2) ה-y.

א. מצא את הפונקציה f(x).

פתרון

$$f'(X)=\frac{-X+1}{\sqrt{-X^2+2X+24}}$$

$$Y_{max}=5$$

$$f(X)=\sqrt{-X^2+2X+24}$$

$$f'(X)=\frac{-2X+2}{2\sqrt{-X^2+2X+24}}=\frac{2(-X+1)}{2\sqrt{-X^2+2X+24}}$$

$$\int\left(\frac{-X+1}{\sqrt{-X^2+2X+24}}\right)dx=\sqrt{-X^2+2X+24}+C$$

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

פתרון

$Y_{max} = 5$

$$\frac{-X+1}{\sqrt{-X^2+2X+24}} = 0$$

$$5 = \sqrt{-1^2+2\cdot 1+24} + C$$

$$-X+1=0$$

$$0 = C$$

$$X = 1$$

$$\boxed{f(X) = \sqrt{-X^2+2X+24}}$$

ב. שרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציה $f(x)$ ושל הפונקציה $g(x) = \sqrt{ax}$, $a > 0$.

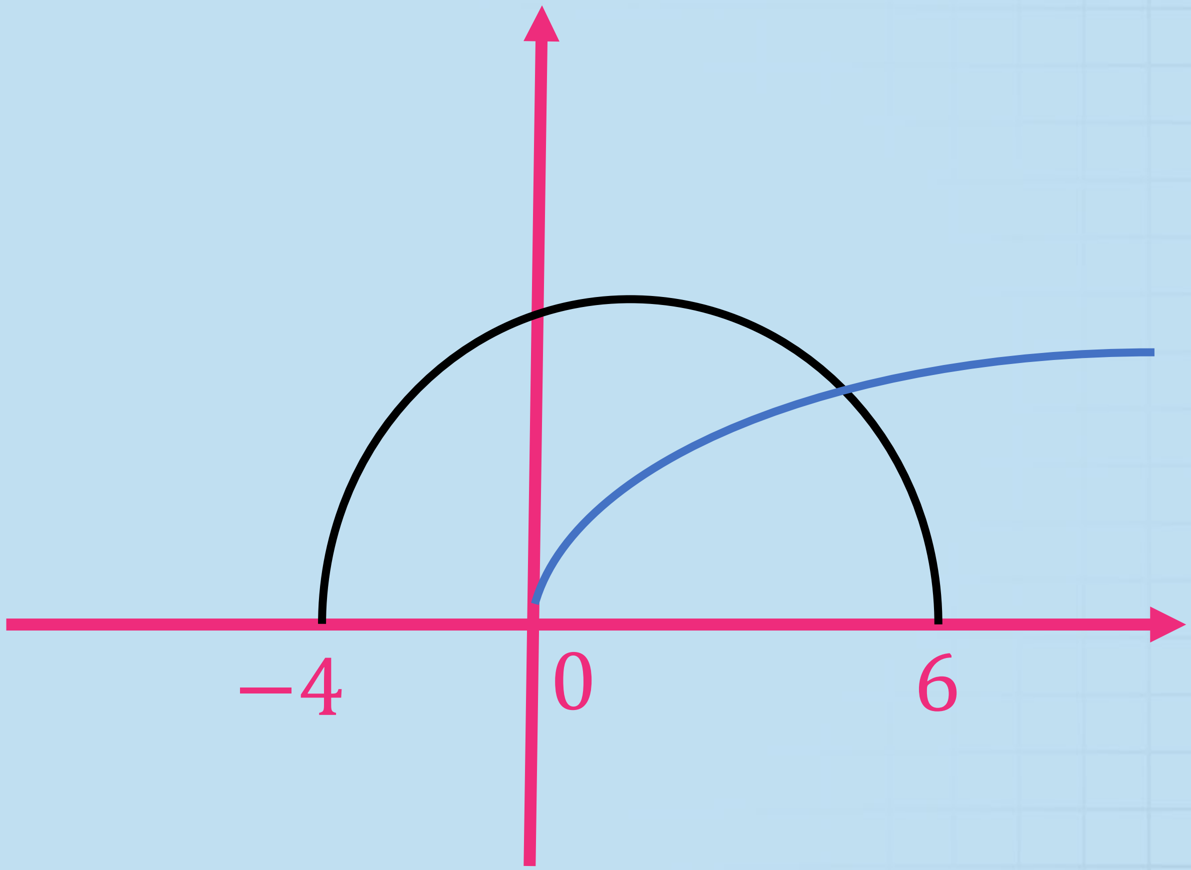
פתרון

$$f(X) = \sqrt{-X^2 + 2X + 24}$$

$$X_1 = -4 \qquad X_2 = 6$$

$$-4 \le X \le 6$$

$$g(X) = \sqrt{aX}$$



ג. הגרפים נחתכים בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 4. חשב את נפח הגוף המתקבל מסיבוב סביב ציר ה-x של השטח, ברביע הראשון, שמוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות וציר: (1) ה-x. (2) ה-y.

פתרון

$$\sqrt{-X^2+2X+24}=4$$

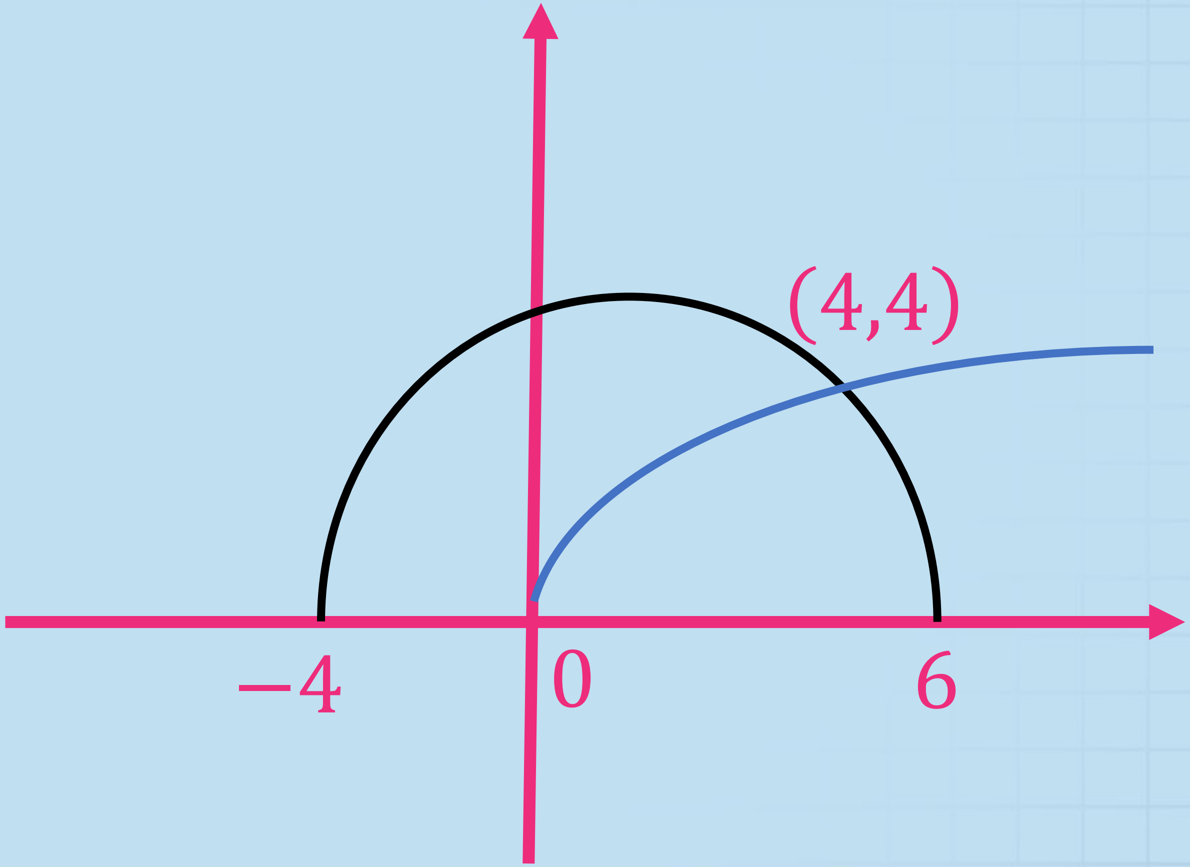
$$-X^2+2X+8=0$$

$$\cancel{X_1=-2} \qquad X_2=4$$

$$4=\sqrt{4a}$$

$$16=4a$$

$$\boxed{a=4}$$

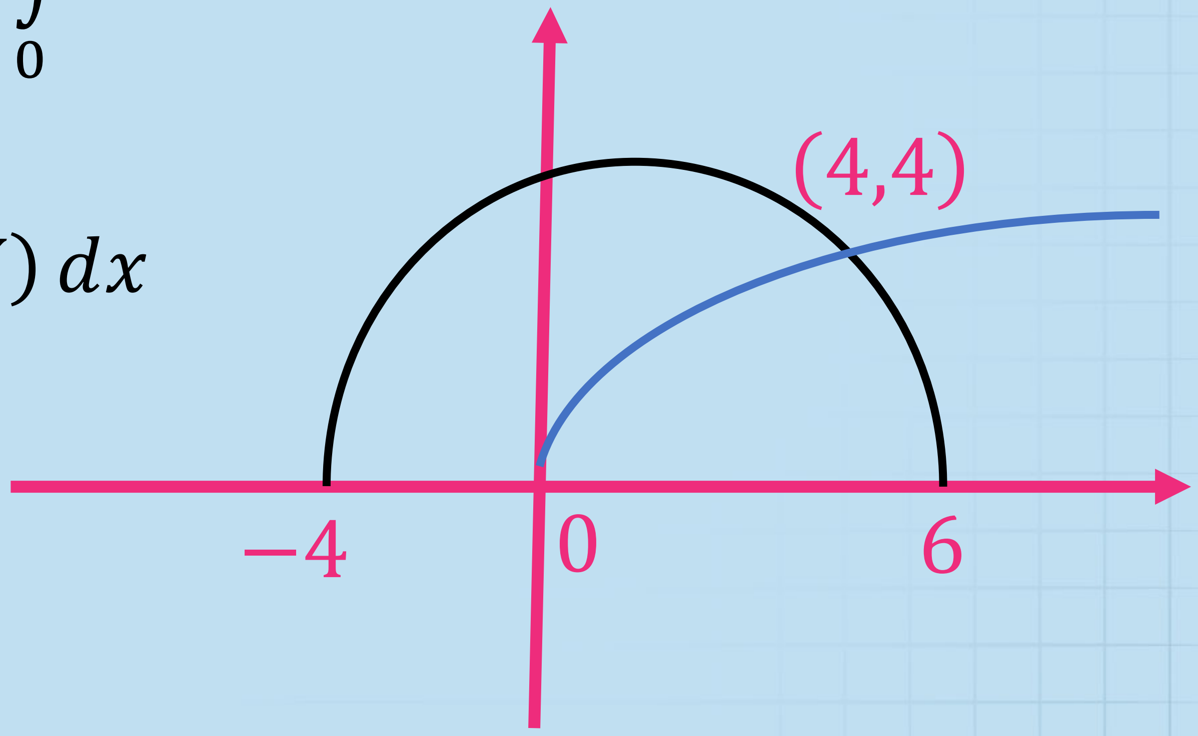


ג. הגרפים נחתכים בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 4. חשב את נפח הגוף המתקבל מסיבוב סביב ציר ה-x של השטח, ברביע הראשון, שמוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות וציר: (1) ה-x. (2) ה-y.

פתרון

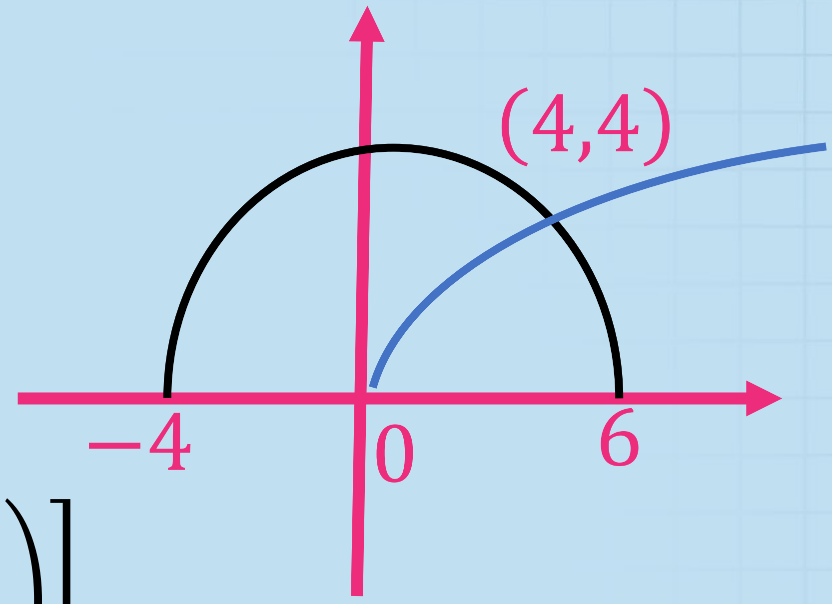
$$V = \pi\int_4^6\left(\sqrt{-X^2+2X+24}\right)^2dx + \pi\int_0^4\left(\sqrt{4X}\right)^2dx$$

$$= \pi\int_4^6(-X^2+2X+24)\,dx + \pi\int_0^4(4X)\,dx$$



ג. הגרפים נחתכים בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 4. חשב את נפח הגוף המתקבל מסיבוב סביב ציר ה-x של השטח, ברביע הראשון, שמוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות וציר: (1) ה-x. (2) ה-y.

פתרון



$$\pi\left[-\frac{X^3}{3}+\frac{2X^2}{2}+24X\right]_4^6=$$

$$\pi\left[\left(-\frac{6^3}{3}+6^2+24\cdot 6\right)-\left(-\frac{4^3}{3}+4^2+24\cdot 4\right)\right]$$

$$\pi\left[(108)-\left(90\frac{2}{3}\right)\right]=17\frac{1}{3}\pi$$

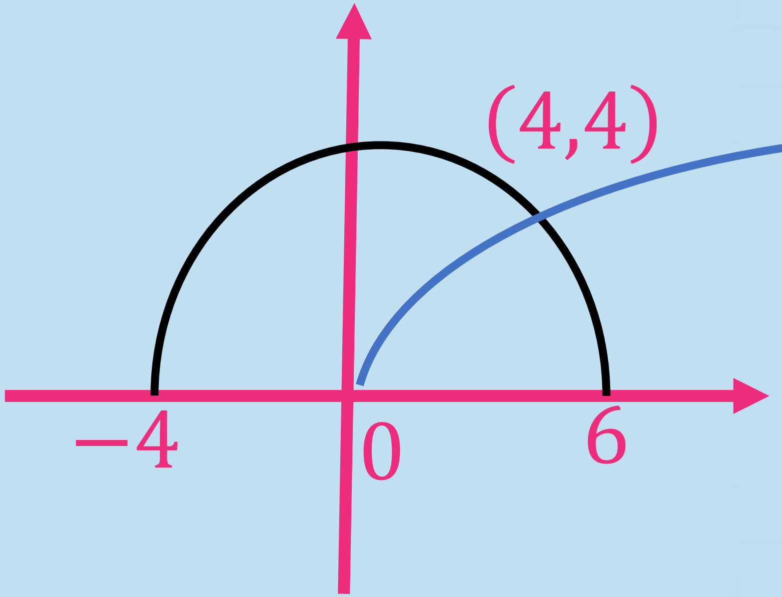
ג. הגרפים נחתכים בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 4. חשב את נפח הגוף המתקבל מסיבוב סביב ציר ה-x של השטח, ברביע הראשון, שמוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות וציר: (1) ה-x. (2) ה-y.

פתרון

$$\pi\left[\frac{4X^2}{2}\right]_0^4 = \pi[2X^2]_0^4$$

$$\pi[(2\cdot 4^2)-(0)] = 32\pi$$

$$\boxed{V = 17\frac{1}{3}\pi + 32\pi = 49\frac{1}{3}\pi}$$



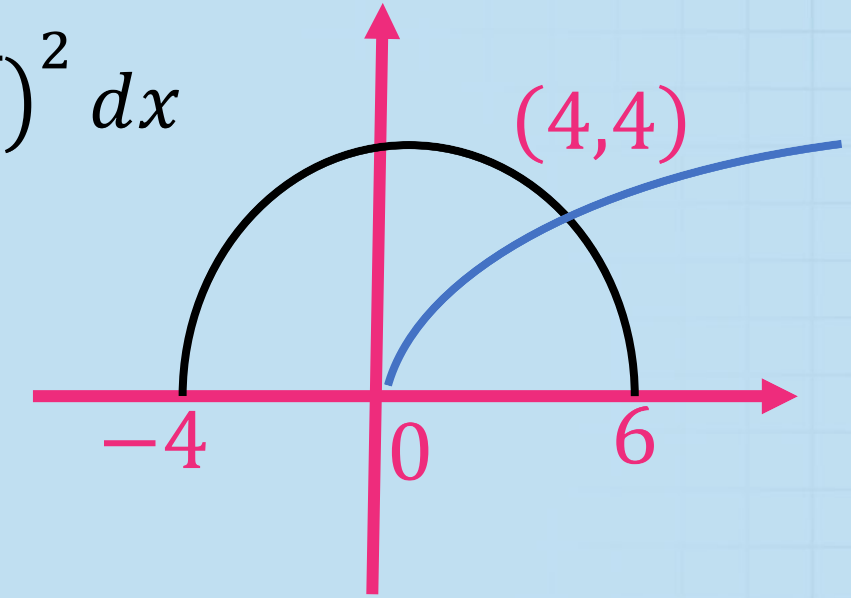
ג. הגרפים נחתכים בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 4. חשב את נפח הגוף המתקבל מסיבוב סביב ציר ה-x של השטח, ברביע הראשון, שמוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות וציר: (1) ה-x. (2) ה-y.

פתרון

$$V = \pi\int_0^4\left(\sqrt{-X^2+2X+24}\right)^2 dx - \pi\int_0^4\left(\sqrt{4X}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^4 \left(-X^2+2X+24-4X\right) dx$$

$$= \pi\left[-\frac{X^3}{3} - X^2 + 24X\right]_0^4$$



$$\boxed{\pi\left[\left(-\frac{4^3}{3} - 4^2 + 24\cdot 4\right) - (0)\right] = 58\frac{2}{3}\pi}$$

בהצלחה