פתרון תרגיל

נפחים – פולינומים,
פונקציות רציונאליות,
פונקציות עם שורשים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 449, ת. 23

המצגת נערכה ע"י אבי בן נעים

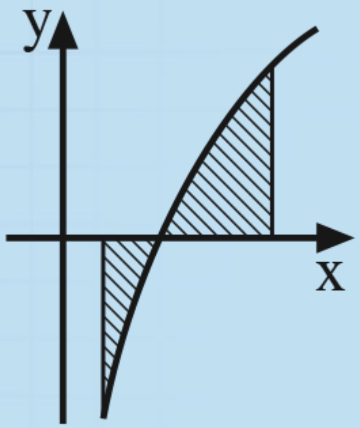
השאלה

23) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{x}$

בין הישרים $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ וציר ה-x.

א. חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב השטח המקווקו סביב ציר ה-x.

ב. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = \frac{1}{x}$ עבור $x > 0$. הפונקציה $g(x)$ היא בעלת התכונה הבאה: לכל $x > 0$ מתקיים: $g(x) = -g(\frac{1}{x})$. נתון: $g(1) = 0$. חשב את השטח המקווקו.

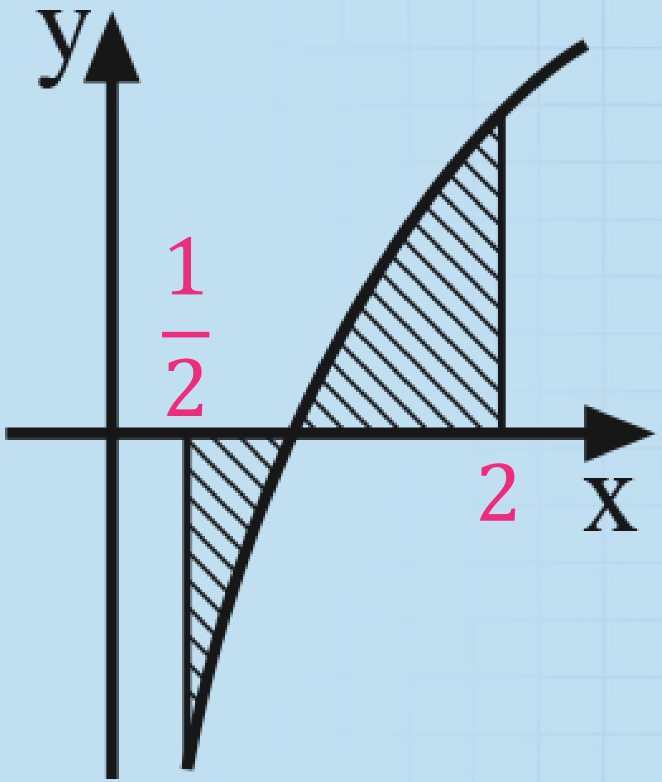


א. חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב השטח המקווקו סביב ציר ה-x.

פתרון

$$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(X-\frac{1}{X}\right)^{2}dx=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(X^{2}-2+\frac{1}{X^{2}}\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{X^{3}}{3}-2X-\frac{1}{X}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

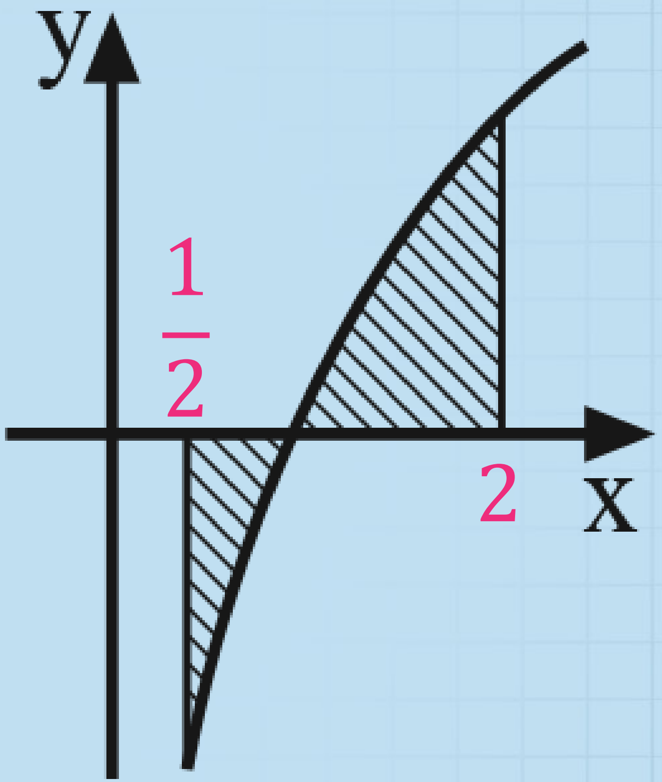


א. חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב השטח המקווקו סביב ציר ה-x.

פתרון

$$= \pi\left[\left(\frac{2^3}{3} - 2\cdot 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\right]$$

$$\boxed{= \pi\left[\left(-1\frac{5}{6}\right) - \left(-2\frac{23}{24}\right)\right] = 1\frac{1}{8}\pi}$$



ב. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -g(\frac{1}{x})$. נתון: $g(1) = 0$. חשב את השטח המקווקו.

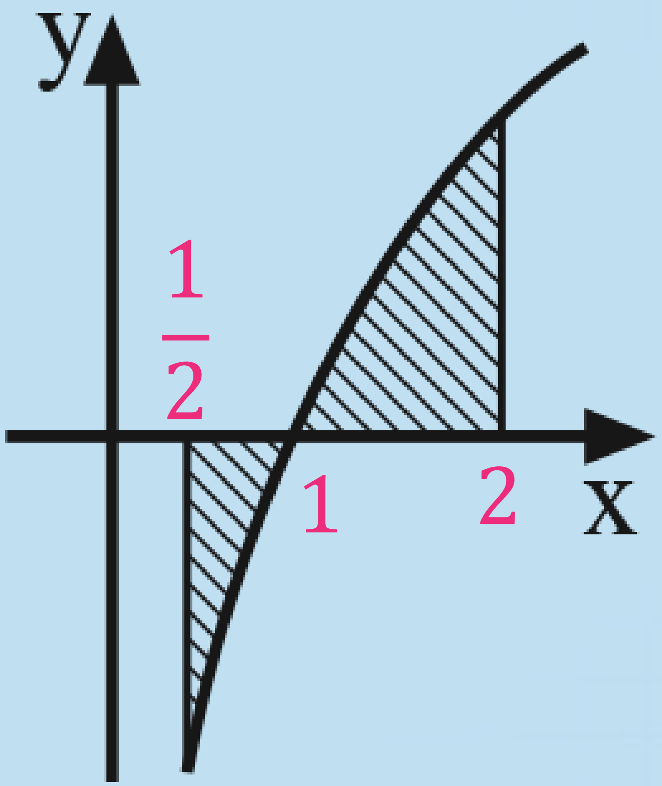
פתרון

$$f(X) = X - \frac{1}{X}$$

$$X - \frac{1}{X} = 0$$

$$X^2 = 1$$

$$X = \pm 1$$



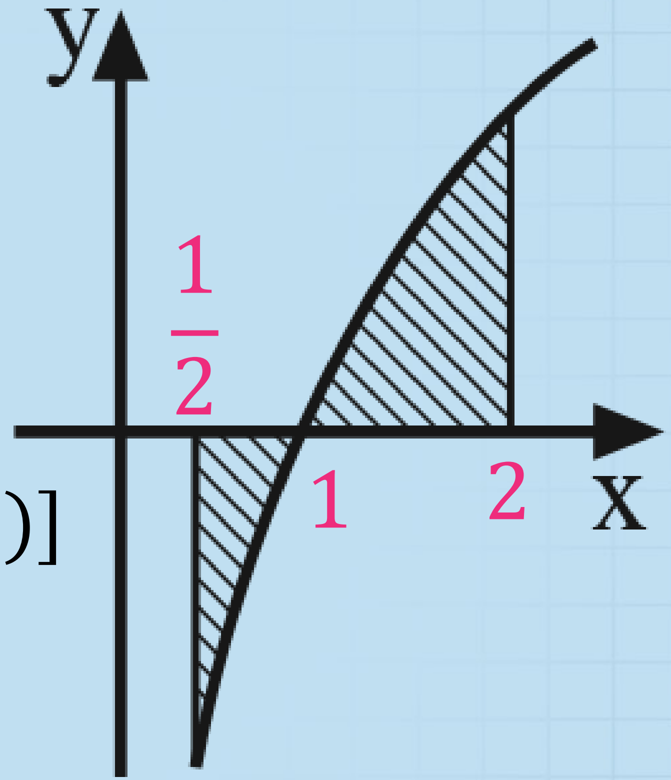
ב. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = \frac{1}{x}$,$g(x) = -g(\frac{1}{x})$. נתון: $g(1) = 0$. חשב את השטח המקווקו.

פתרון

$$S_1 = \int_1^2 \left(X - \frac{1}{X}\right) dx = \int_1^2 (X)\, dx - \int_1^2 \left(\frac{1}{X}\right) dx$$

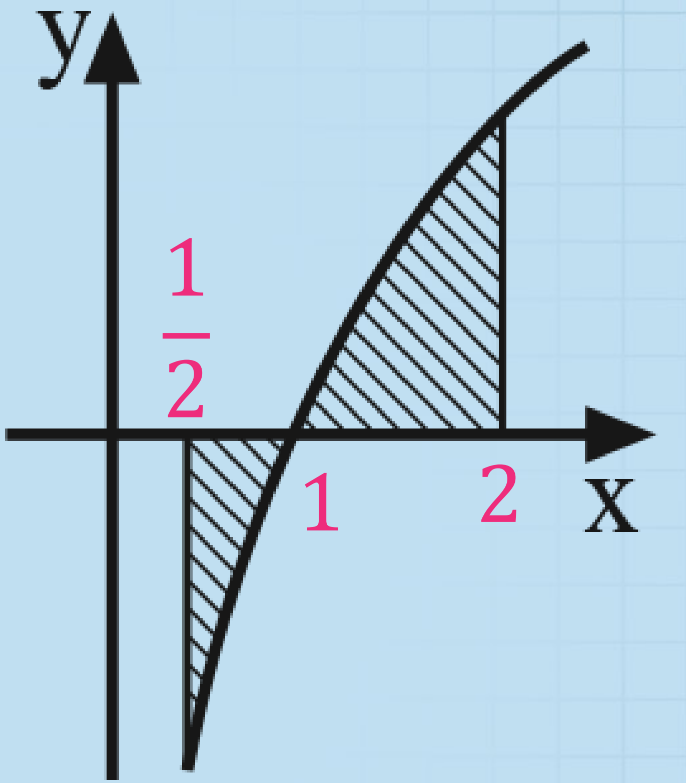
$$= \left[\frac{X^2}{2}\right]_1^2 - [g(X)]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\right) - [g(2) - g(1)]$$

$$= \left(1\frac{1}{2}\right) - [g(2) - 0] = 1\frac{1}{2} - g(2)$$



ב. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x)=\frac{1}{x}$ $g(x)=-g(\frac{1}{x})$. נתון: $g(1)=0$. חשב את השטח המקווקו.

פתרון



$$S_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[0-\left(X-\frac{1}{X}\right)\right]dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-X)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{X}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{X^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+[g(X)]_{\frac{1}{2}}^{1}=\left(-\frac{1^2}{2}\right)-\left(-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right)+\left[g(1)-g\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

ב. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = -g(\frac{1}{x})$. נתון: $g(1) = 0$. חשב את השטח המקווקו.

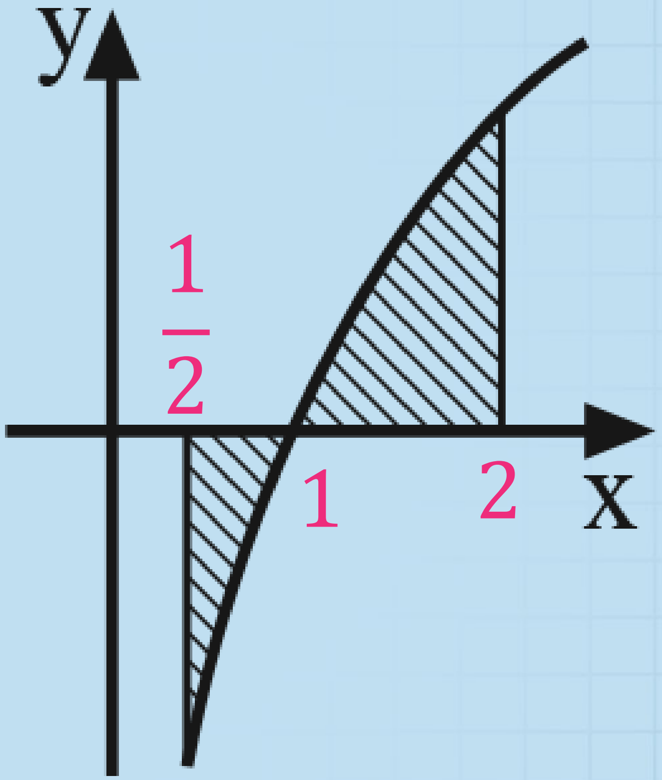
פתרון

$$= \left(-\frac{3}{8}\right) + \left[0 - g\left(\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{3}{8} - g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$S_1 + S_2 = \left(1\frac{1}{2} - g(2)\right) + \left(-\frac{3}{8} - g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$g(2) = -g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{S_1 + S_2 = 1\frac{1}{8}}$$



בהצלחה