פתרון תרגיל

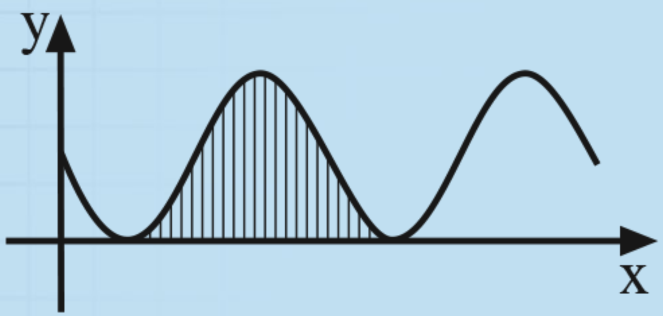
שטחים – פונקציות טריגונומטריות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 424, ת. 20

המצגת נערכה ע"י אבי בן נעים

השאלה



20) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = (\sin x + a\cos x)^2$
בתחום $0 \le x \le 2\pi$. שיפוע המשיך לגרף
הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$ הוא -2.

א. מצא את a.

ב. חשב את השטח המקווקו שבציור.

ג. סעיף זה מתייחס לא רק לתחום $0 \le x \le 2\pi$.
$g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g''(x) = f(x)$. נתון: $|g'(\frac{5}{4}\pi) - g'(b)| = \pi$.
מצא את b.

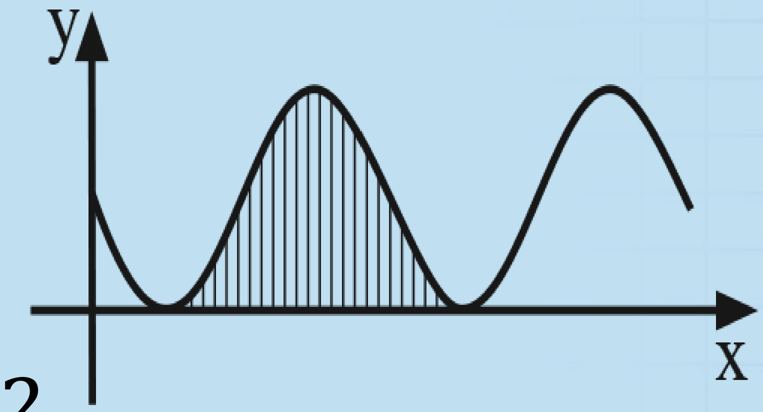
א. מצא את a.

פתרון

$$f(X) = (\sin X + a\cos X)^2$$

$$f'(0) = -2$$

$$f'(X) = 2(\sin X + a\cos X)(\cos X - a\sin X)$$



$$2(\sin(0) + a\cos(0))(\cos(0) - a\sin(0)) = -2$$

$$2(0 + a)(1 + 0) = -2$$

$$\boxed{a = -1}$$

ב. חשב את השטח המקווקו שבציור.

פתרון

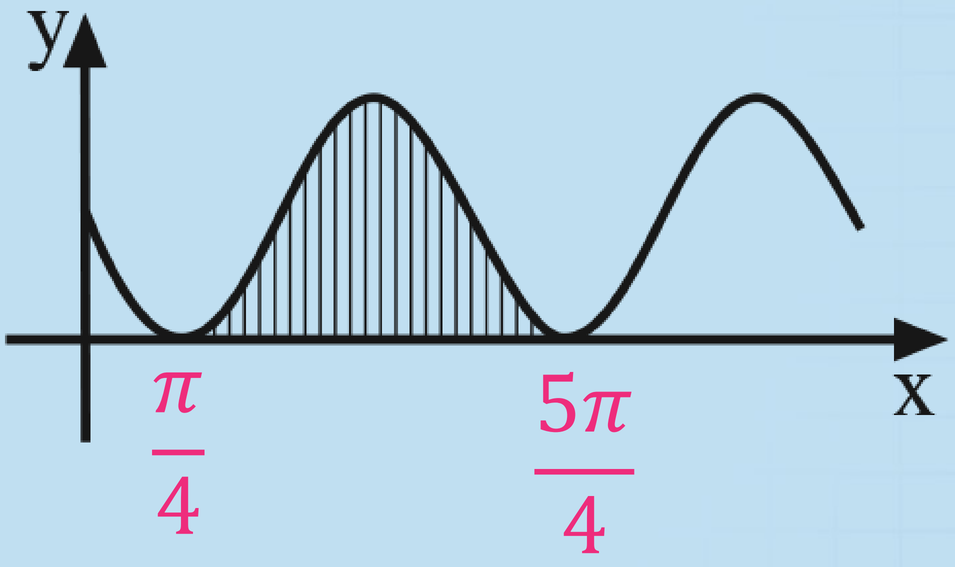
$$f(X) = (\sin X - \cos X)^2$$

$$(\sin X - \cos X)^2 = 0$$

$$\sin X = \cos X \qquad \tan X = 1$$

$$X = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$X = \frac{\pi}{4} \qquad X = \frac{5\pi}{4}$$

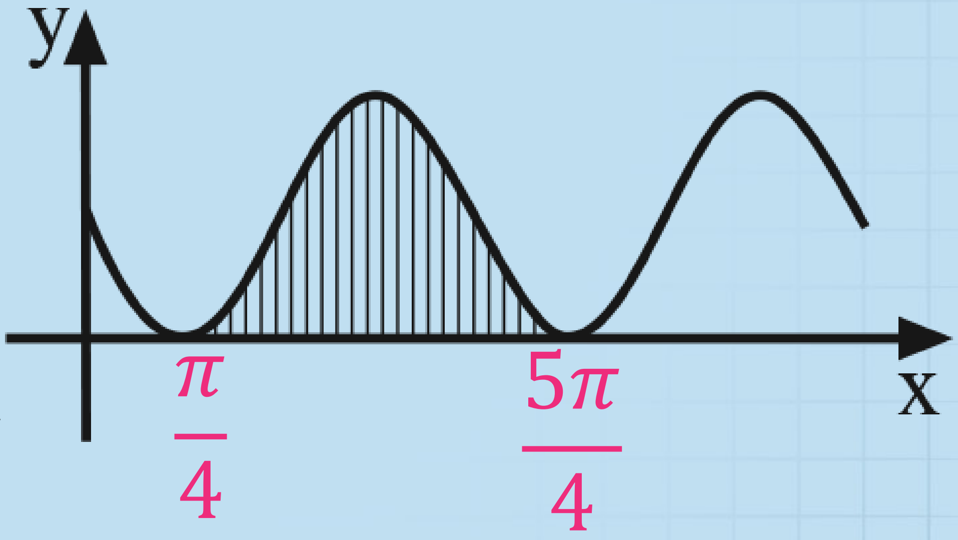


ב. חשב את השטח המקווקו שבציור.

פתרון

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}[(\sin X-\cos X)^2]dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}[\sin^2X+2\sin X\cos X+\cos^2X]dx$$

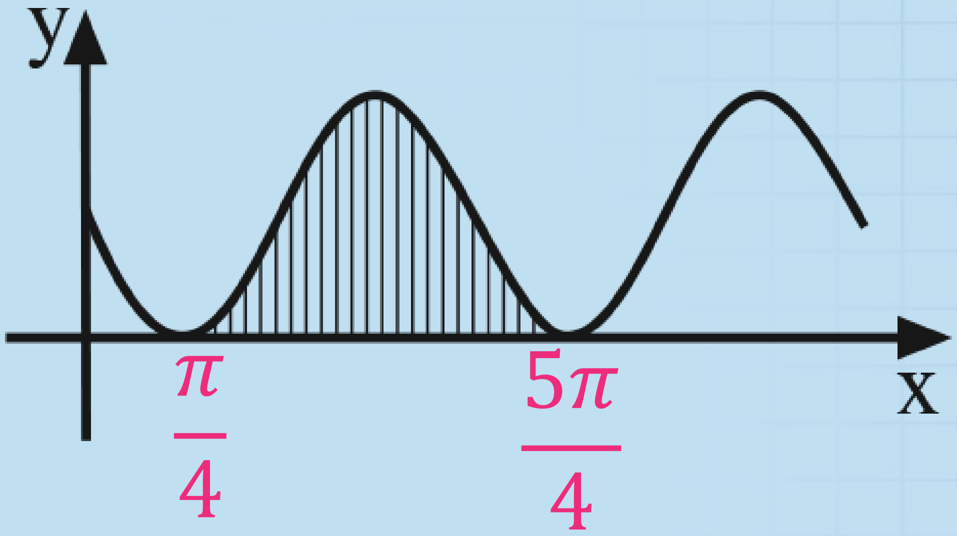
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+2\sin X\cos X)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin 2X)dx$$



ב. חשב את השטח המקווקו שבציור.

פתרון

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin 2X)dx = \left[X-\frac{\cos 2X}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$



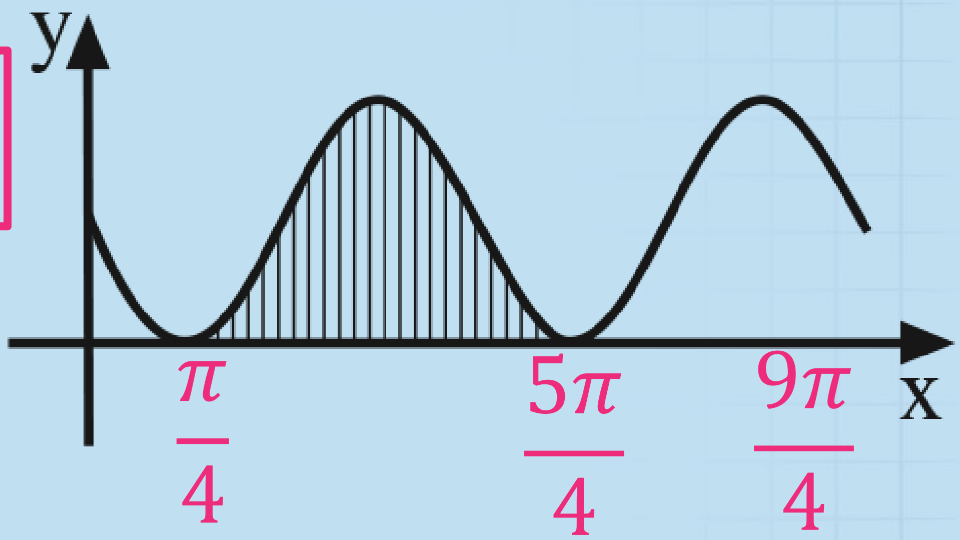
$$\boxed{\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\cos\left(\frac{10\pi}{4}\right)}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)}{2}\right)=\left(\frac{5\pi}{4}-0\right)-\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\pi}$$

ג. $g''(x) = f(x)$. $|g'(\frac{5}{4}\pi) - g'(b)| = \pi$. מצא את b.

פתרון

$$g'(X) = F(X)$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (f(X))dx = F\left(\frac{5\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi \quad \boxed{b = \frac{\pi}{4}}$$



$$\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} (f(X))dx = F\left(\frac{9\pi}{4}\right) - F\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \pi \quad \boxed{b = \frac{9\pi}{4}}$$

בהצלחה