פתרון תרגיל

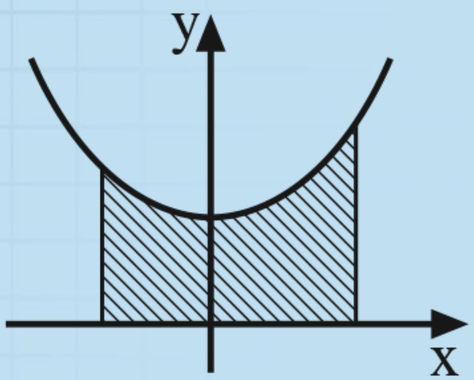
שטחים – פונקציות טריגונומטריות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 421, ת. 4

המצגת נערכה ע״י אבי בן נעים

השאלה



4) א. חשב את השטח שמוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$,
הישרים $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{3}$ וציר ה-x.

ב. (1) היעזר בגרף של $f(x)$ והסבר מדוע $f'(x)$ חיובית
בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$.

(2) ידוע שמתקיים $f'(0)=0$. חשב את השטח שמוגבל
ע"י הגרף של $f'(x)$, ציר ה-x והישר $x=\frac{\pi}{6}$.

ג. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g''(x)=f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

(1) נתון: $g'(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}-1$. חשב את $g'(-\frac{\pi}{4})$.

(2) מצא את שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $g(x)$ בתחום הנ"ל וקבע את סוגה.

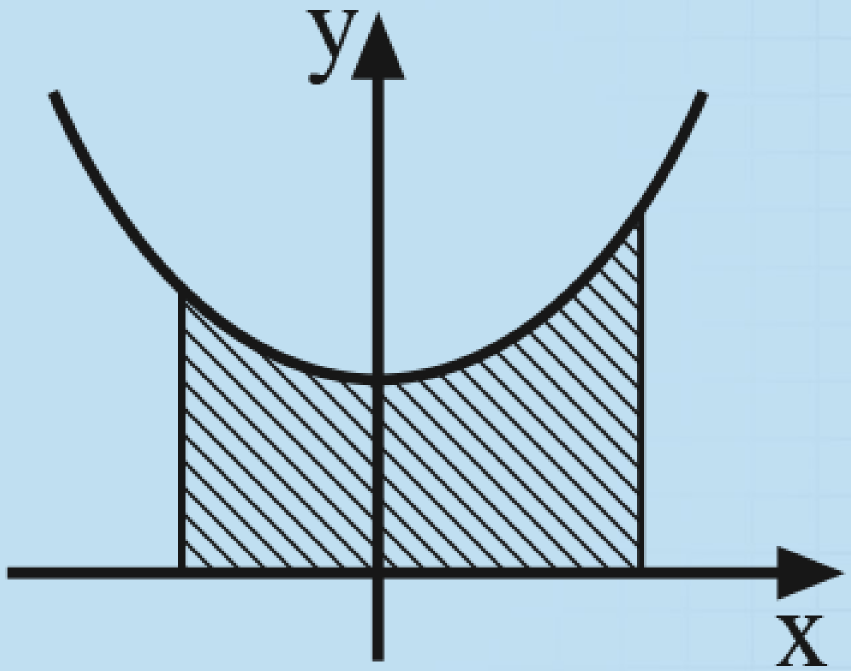
(3) הראה שהפונקציה $g(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום הנ"ל.

א. חשב את השטח שמוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$,

הישרים $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$ וציר ה-x.

פתרון

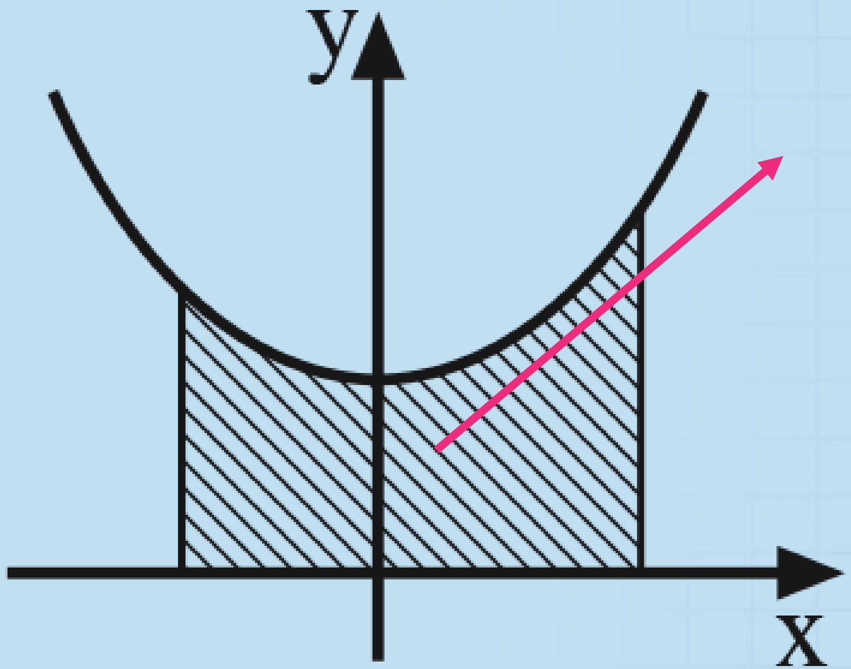
$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 X}\right) dx = [\tan X]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$



$$\boxed{\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{3} + 1}$$

ב. (1) היעזר בגרף של $f(x)$ והסבר מדוע $f'(x)$ חיובית בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

פתרון



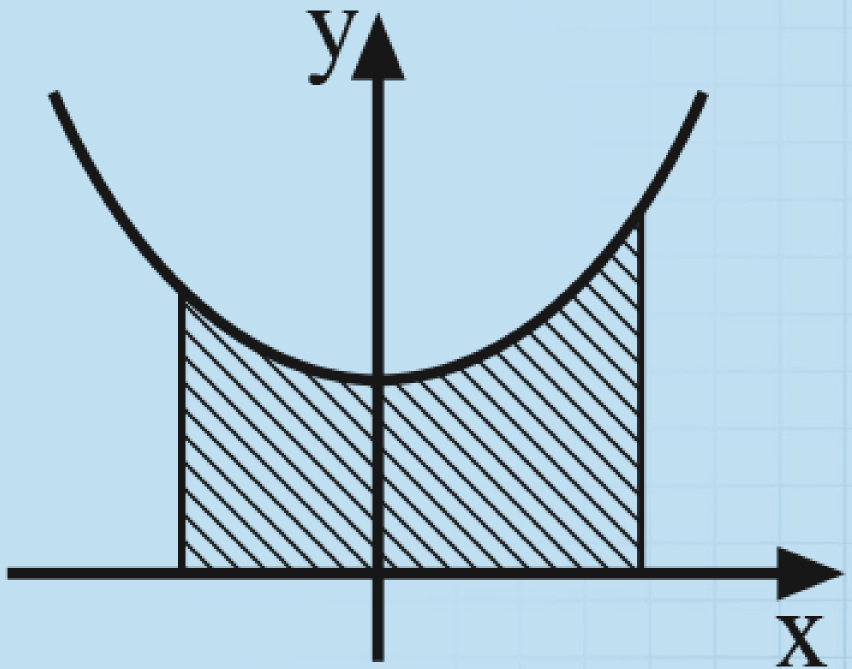
מכיוון שבתחום הנ״ל הפונקציה עולה, הרי שהנגזרת חיובית

(2) ידוע שמתקיים $f'(0) = 0$. חשב את השטח שמוגבל ע״י הגרף של $f'(x)$, ציר ה-x והישר $x = \frac{\pi}{6}$.

פתרון

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(f'(X)\right)dx = [f(X)]_0^{\frac{\pi}{6}} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) - f(0)$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) - \left(\frac{1}{\cos^2(0)}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}}$$

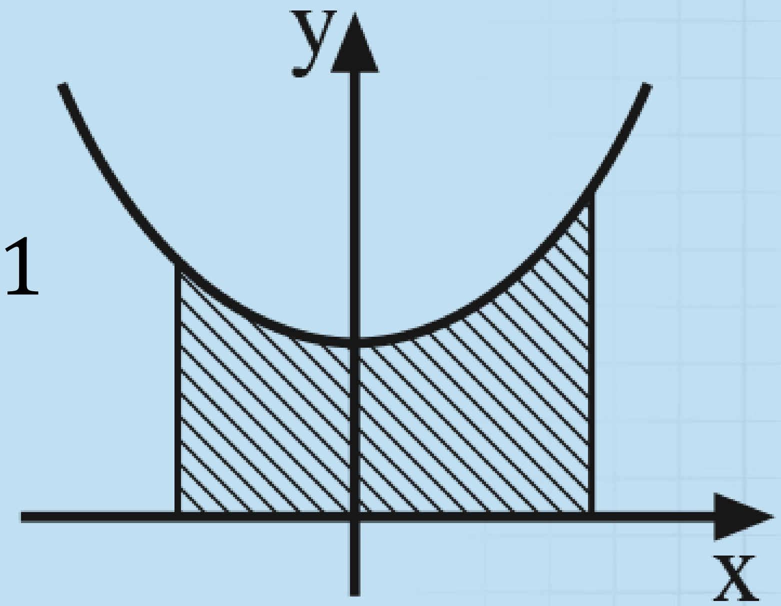


$g''(x) = f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. (1) נתון: $g'(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - 1$. חשב את $g'(-\frac{\pi}{4})$.

פתרון

$$g'(X) = F(X)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(f(X)\right)dx = \sqrt{3} + 1$$



$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{3}\right) - g'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$$

$$\sqrt{3} - 1 - g'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$$

$$\boxed{g'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2}$$

(2) מצא את שיעור ה-x של נקודת הקיצון של g(x) בתחום הנ"ל וקבע את סוגה.

פתרון

$$g'(X) = \int \left(\frac{1}{\cos^2 X}\right) dx = \tan X + C$$

$$-2 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$-2 = -1 + C$$

$$-1 = C$$

$$g'(X) = \tan X - 1$$

$$\tan X - 1 = 0$$

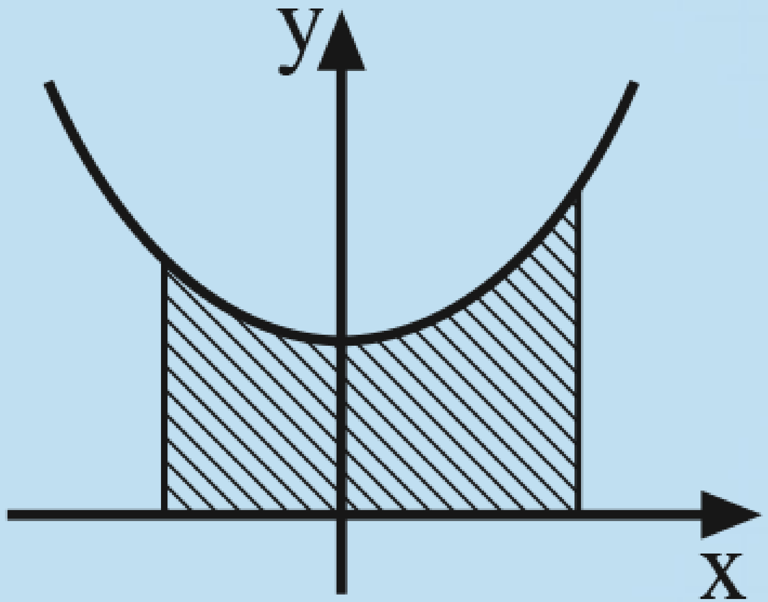
$$\tan X = 1 \qquad X = \frac{\pi}{4} + \pi k \qquad \boxed{X = \frac{\pi}{4}}$$

$$g''\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = + \qquad \boxed{min}$$

(3) הראה שהפונקציה $g(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום הנ״ל.

פתרון

$$\boxed{g''(X) > 0 \gg g(X)\ U}$$



בהצלחה