פתרון תרגיל

שטח המוגבל ע"י גרף של פונקציה וציר ה– X

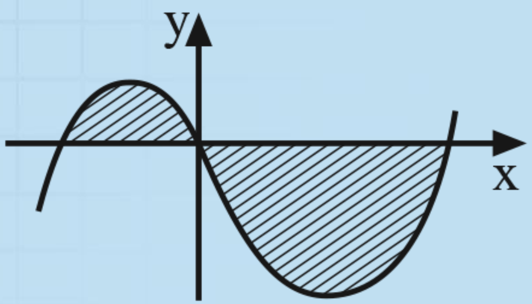
מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 391, ת. 26

המצגת נערכה ע"י אבי בן נעים

השאלה

26) א. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה
$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ וציר ה-x.



ב. $F(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$.
נתון שערך הפונקציה $F(x)$ בנקודת המקסימום
שלה הוא 2. מבלי למצוא את הפונקציה $F(x)$
חשב (בהסתמך על החישובים שבסעיף א') את
ערכי הפונקציה $F(x)$ בנקודות המינימום שלה.

ג. נסמן ב-x_1 את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x
בתחום $0 < x < 2$. מבלי למצוא את x_1 הוכח: השטח ברביע הרביעי שמוגבל
ע"י גרף הפונקציה $f'(x)$ והצירים שווה לשטח ברביע הראשון שמוגבל ע"י גרף
הפונקציה $f'(x)$, ציר ה-x והישר $x = 2$.

א. חשב את השטח המוגבל ע״י גרף הפונקציה
$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ וציר ה-x.

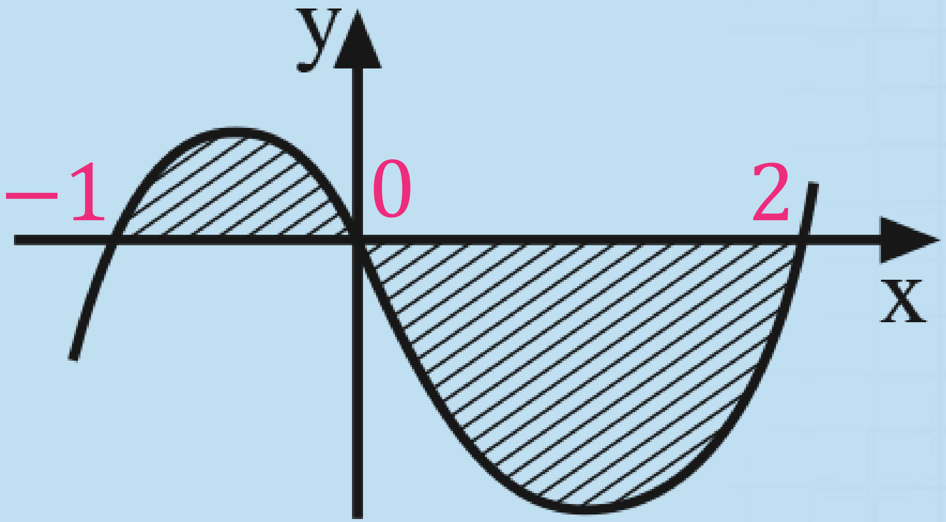
פתרון

$$f(X) = X^3 - X^2 - 2X$$

$$X^3 - X^2 - 2X = 0$$

$$X(X^2 - X - 2) = 0$$

$\boxed{X = 0}$ $\boxed{X = 2}$ $\boxed{X = -1}$

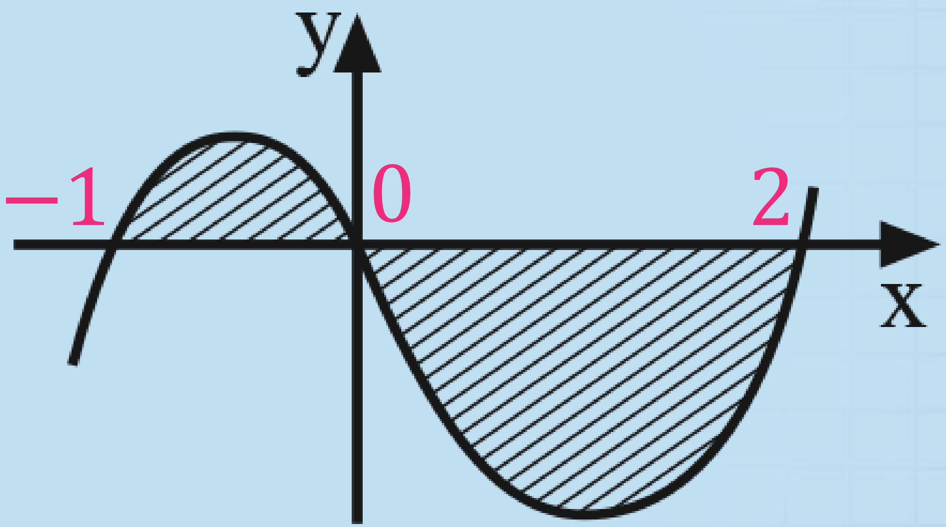


א. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה
$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ וציר ה-x.

פתרון

$$S_1 = \int_0^2 [0 - (X^3 - X^2 - 2X)]dx$$

$$S_2 = \int_{-1}^0 (X^3 - X^2 - 2X)dx$$

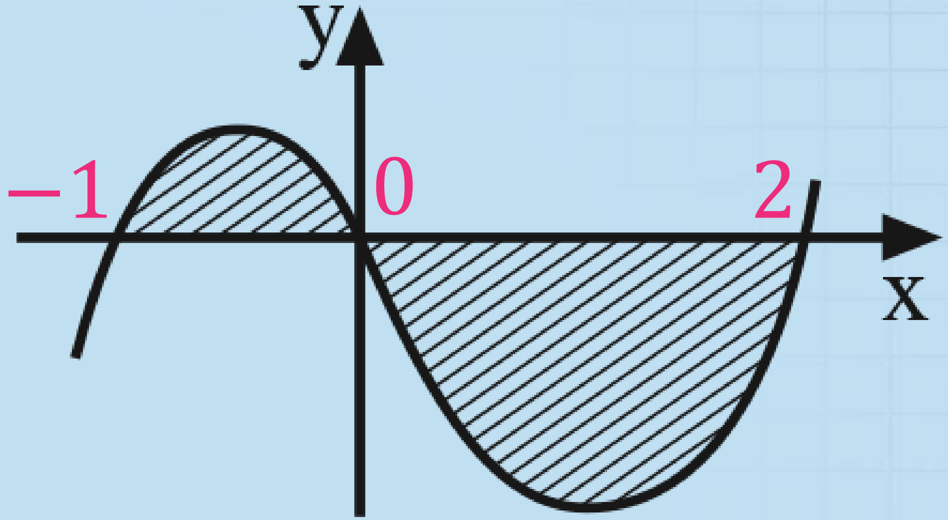


א. חשב את השטח המוגבל ע״י גרף הפונקציה
$f(x) = x^3-x^2-2x$ וציר ה-x.

פתרון

$$S_1=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{X^3}{3}+\frac{2X^2}{2}\right]_0^2$$

$$=\left(-\frac{2^4}{4}+\frac{2^3}{3}+2^2\right)-(0)=2\frac{2}{3}$$



$$S_2=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{X^3}{3}-\frac{2X^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

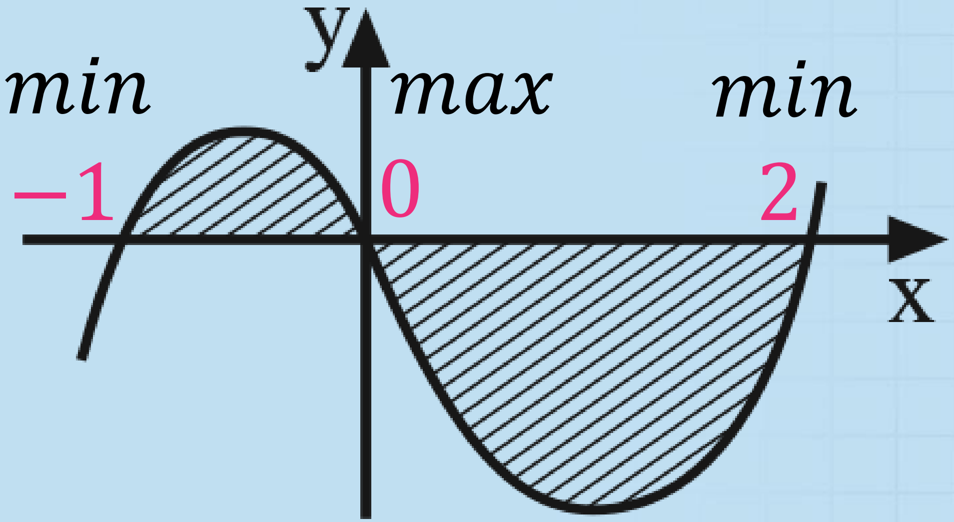
$$=(0)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2\right)=\frac{5}{12}$$

$$\boxed{S_1+S_2=2\frac{2}{3}+\frac{5}{12}=3\frac{1}{12}}$$

ב. $F(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$. נתון שערך הפונקציה $F(x)$ בנקודת המקסימום שלה הוא 2. מבלי למצוא את הפונקציה $F(x)$ חשב (בהסתמך על החישובים שבסעיף א') את ערכי הפונקציה $F(x)$ בנקודות המינימום שלה.

פתרון

$$F(0) = 2$$



$$S_1 = \int_0^2 [0 - (X^3 - X^2 - 2X)]dx$$

$$= 0 - [F(2) - F(0)] = 2\frac{2}{3}$$

$$-F(2) + 2 = 2\frac{2}{3}$$

$$\boxed{F(2) = \frac{2}{3}}$$

ב. $F(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$. נתון שערך הפונקציה $F(x)$ בנקודת המקסימום שלה הוא 2. מבלי למצוא את הפונקציה $F(x)$ חשב (בהסתמך על החישובים שבסעיף א') את ערכי הפונקציה $F(x)$ בנקודות המינימום שלה.

פתרון

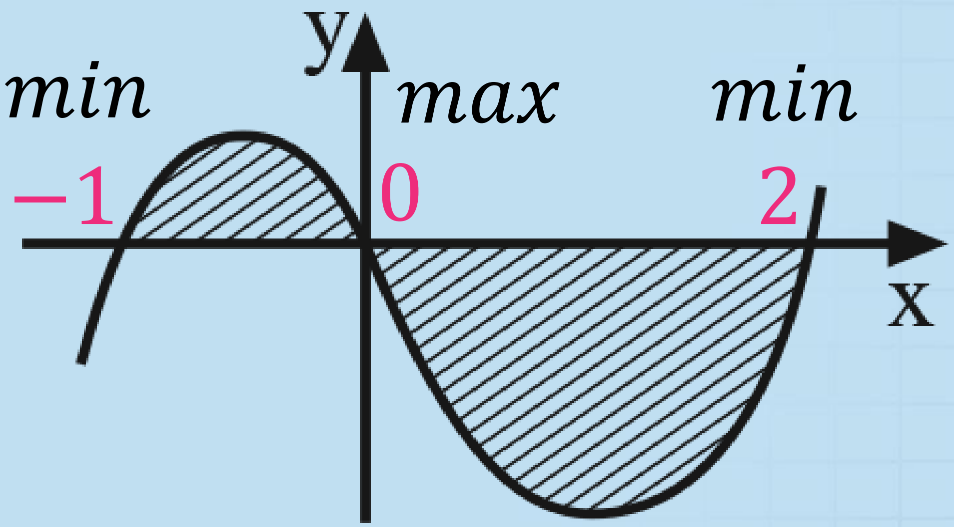
$$S_2 = \int_{-1}^{0} (X^3 - X^2 - 2X)dx$$

$$= [F(0) - F(-1)] = \frac{5}{12}$$

$$2 - F(1) = \frac{5}{12}$$

$$\boxed{F(1) = 1\frac{7}{12}}$$

$$F(0) = 2$$



ג. נסמן ב-x_1 את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x בתחום $0 < x < 2$.
מבלי למצוא את x_1 הוכח: השטח ברביע הרביעי שמוגבל ע״י גרף הפונקציה $f'(x)$ והצירים שווה לשטח ברביע הראשון שמוגבל ע״י גרף הפונקציה $f'(x)$, ציר ה-x והישר $x = 2$.

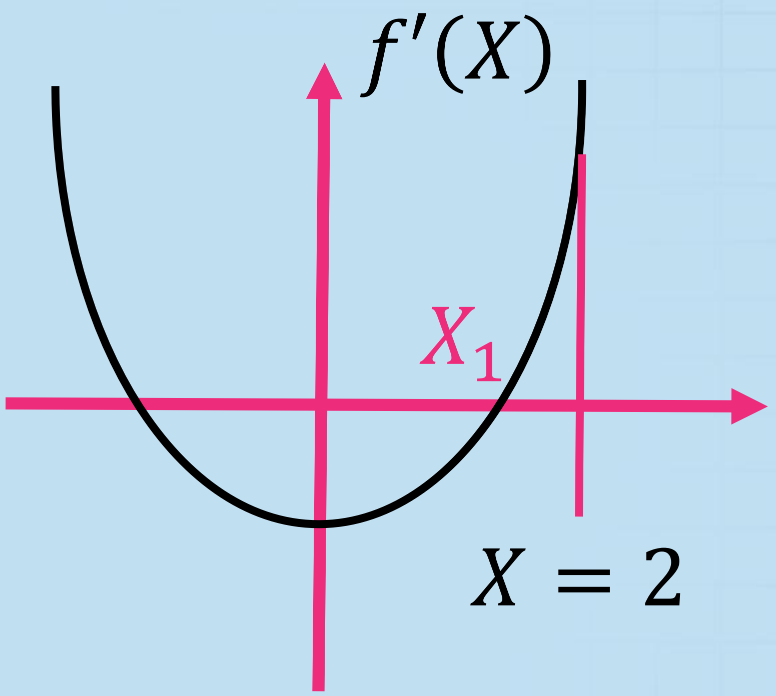
פתרון

$$\int_{X_1}^{2} \left(f'(X)\right) dx = \int_{0}^{X_1} \left[0 - \left(f'(X)\right)\right] dx$$

$$f(2) - \cancel{f(X_1)} = 0 - [\cancel{f(X_1)} - f(0)]$$

$$\boxed{f(2) = f(0)}$$

$$\boxed{0 = 0}$$



בהצלחה