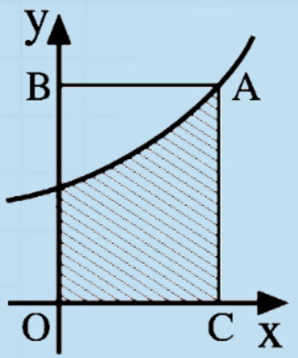
פתרון תרגיל

שטחים פונקציות מעריכיות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 439, ת. 16

השאלה



16) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = e^{ax}$, $a > 0$. דרך הנקודה A, שנמצאת על גרף הפונקציה ושיעור ה-y שלה הוא $y = e^{a}$, מעבירים ישר המקביל לציר ה-x וישר המקביל לציר ה-y כך שנוצר מלבן ABOC כמתואר בציור (O ראשית הצירים). היחס בין השטח שמוגבל ע"י גרף הפונקציה, הישר AC והצירים לבין שטח המלבן ABOC הוא $\frac{3e^{a}}{16a}$.

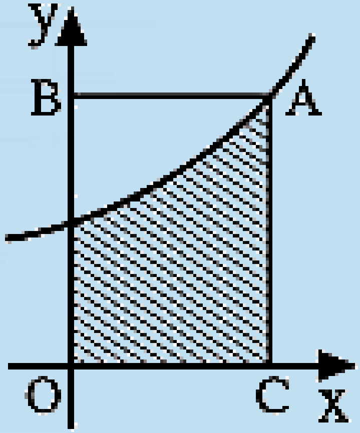
א. מצא את שני ערכי a האפשריים.

ב. נסמן ב-$f_1(x)$ את הפונקציה $f(x)$ שמתקבלת מה-a הגדול מבין השניים שמצאת בסעיף א' וב-$f_2(x)$ את הפונקציה $f(x)$ שמתקבלת מה-a הקטן מבין השניים שמצאת בסעיף א'. ישר המקביל לציר ה-x חותך, ברביע הראשון, את גרף הפונקציה $f_1(x)$ בנקודה D ואת גרף הפונקציה $f_2(x)$ בנקודה E. נתון: $DE = \frac{\ln 3}{\ln 4 - \ln 3}$.
חשב את השטח שמוגבל ע"י גרף הפונקציה $f_1(x)$, הצירים והישר $x = x_D$.

א. מצא את שני ערכי a האפשריים.

פתרון

א. נמצא את נק' A:



$$e^{ax} = e^{a}$$

$$x = 1$$

לכן שטח המלבן ABOC הוא e^{a}

נחשב כעת את השטח המקווקו:

$$\int_{0}^{1} e^{ax}\,dx = \left[\frac{e^{ax}}{a}\right]_{0}^{1} = \frac{e^{a}}{a} - \frac{1}{a}$$

א. מצא את שני ערכי a האפשריים.

פתרון

נשווה כעת ליחס הנתון :

$$\frac{\frac{e^a}{a}-\frac{1}{a}}{\frac{e^a}{1}}=\frac{3e^a}{16a}$$

$$\frac{e^a-1}{a\cdot e^a}=\frac{3e^a}{16a}$$

$$16e^a-16=3e^{2a}$$

א. מצא את שני ערכי a האפשריים.

פתרון

$$e^{a} = \mathrm{t}$$

$$3t^{2} - 16t + 16 = 0$$

$$t_1 = 4$$

$$e^{a} = 4$$

$$a = ln4$$

$$t_2 = \frac{4}{3}$$

$$e^{a} = \frac{4}{3}$$

$$a = ln\frac{4}{3}$$

נסמן ב-$f_1(x)$ את הפונקציה $f(x)$ שמתקבלת מה-a הגדול מבין השניים שמצאת בסעיף א' וב-$f_2(x)$ את הפונקציה $f(x)$ שמתקבלת מה-a הקטן מבין השניים שמצאת בסעיף א'. ישר המקביל לציר ה-x חותך, ברביע הראשון, את גרף הפונקציה $f_1(x)$ בנקודה D ואת גרף הפונקציה $f_2(x)$ בנקודה E. נתון: $DE = \frac{\ln 3}{\ln 4 - \ln 3}$.
חשב את השטח שמוגבל ע"י גרף הפונקציה $f_1(x)$, הצירים והישר $x = x_D$.

פתרון

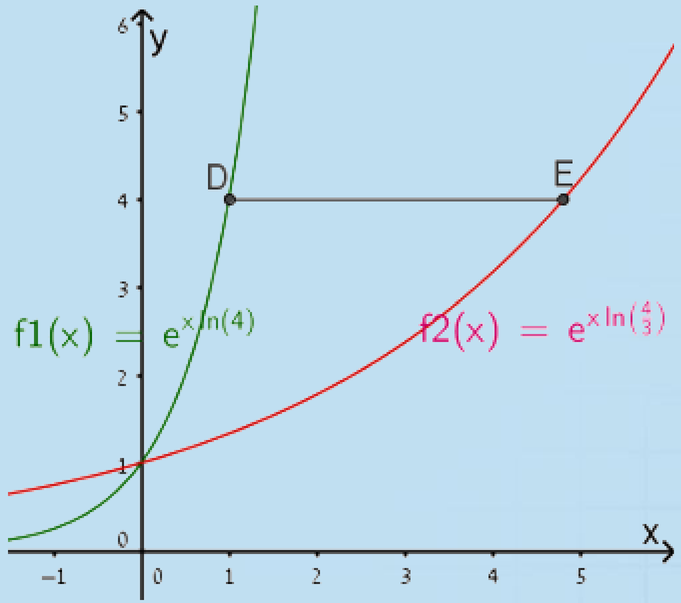
ב.

$$f_2(x) = e^{x \cdot ln\frac{4}{3}}$$

$$f_1(x) = e^{x \cdot ln4}$$

$$D(t, e^{t \cdot ln4})$$

$$E(\quad, e^{t \cdot ln4})$$

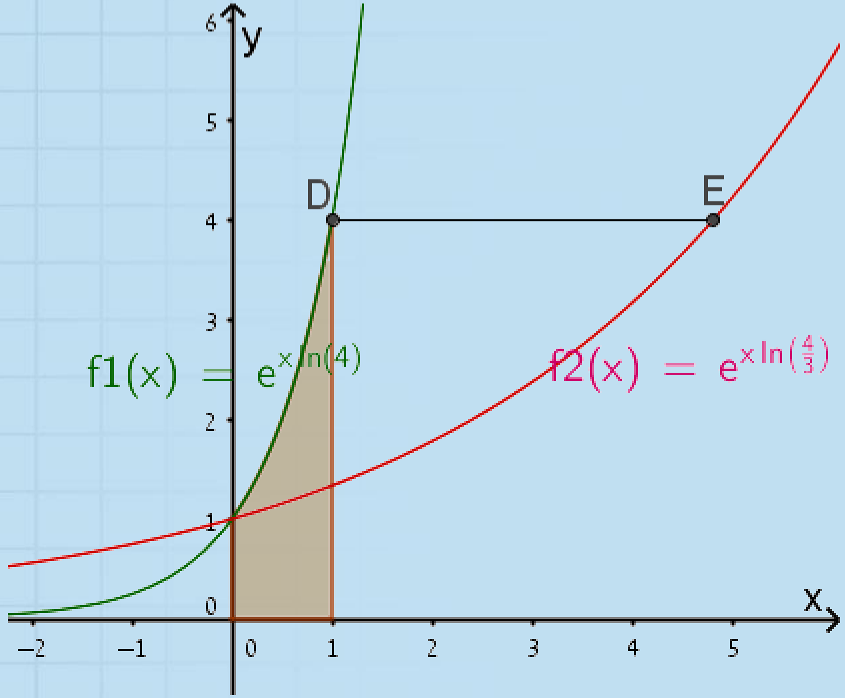


$$e^{xln\frac{4}{3}} = e^{t \cdot ln4}$$

$$\frac{t \cdot ln4}{ln\frac{4}{3}} = x$$

נסמן ב-$f_1(x)$ את הפונקציה $f(x)$ שמתקבלת מה-a הגדול מבין השניים שמצאת בסעיף א' וב-$f_2(x)$ את הפונקציה $f(x)$ שמתקבלת מה-a הקטן מבין השניים שמצאת בסעיף א'. ישר המקביל לציר ה-x חותך, ברביע הראשון, את גרף הפונקציה $f_1(x)$ בנקודה D ואת גרף הפונקציה $f_2(x)$ בנקודה E. נתון: $DE = \frac{\ln 3}{\ln 4 - \ln 3}$.
חשב את השטח שמוגבל ע"י גרף הפונקציה $f_1(x)$, הצירים והישר $x = x_D$.

פתרון



$$\frac{t \cdot ln4}{ln\frac{4}{3}} - t = \frac{ln3}{ln4 - ln3}$$

$$t \cdot ln4 - t \cdot ln4 + t \cdot ln3 = ln3$$

$$t = 1$$

$$\int_0^1 e^{x \cdot ln4}\, dx = \left[\frac{e^{xln4}}{ln4}\right]_0^1 = \frac{e^{ln4}}{ln4} - \frac{1}{ln4} = \frac{3}{ln4}$$

בהצלחה