פתרון תרגיל

מציאת פונקציה על פי נגזרתה ונקודה שעליה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 422, ת. 32

המצגת נערכה ע״י טל מדר

השאלה

32) הנגזרת של פונקציה היא $f'(x) = \frac{1-e^x}{x-e^x}$. הישר $y = x+\ln(e-1)$ משיק לגרף הפונקציה.

א. היעזר בפונקציה $g(x) = x-e^x$ והוכח שהמכנה של הנגזרת $f'(x)$ הוא שלילי לכל x.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. A היא נקודה על גרף הפונקציה $f(x)$ ו-B היא נקודה על הישר $y = x$. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

32) הנגזרת של פונקציה היא $f'(x) = \frac{1-e^x}{x-e^x}$. הישר $y = x+\ln(e-1)$ משיק לגרף הפונקציה.

א. היעזר בפונקציה $g(x) = x-e^x$ והוכח שהמכנה של הנגזרת $f'(x)$ הוא שלילי לכל x.

פתרון

א. נמצא נקודת קיצון של $g(x)$:

$$g'(x) = 1 - e^x$$

$$1 = e^x$$

$$0 = x$$

$$g(0) = 0 - e^0 = -1$$

$$g''(x) = -e^x < 0$$

32) הנגזרת של פונקציה היא $f'(x)=\frac{1-e^x}{x-e^x}$. הישר $y=x+\ln(e-1)$ משיק לגרף הפונקציה.

א. היעזר בפונקציה $g(x)=x-e^x$ והוכח שהמכנה של הנגזרת $f'(x)$ הוא שלילי לכל x.

פתרון

לכן $(0,-1)$ נקודת מקסימום

$g(x)$ שלילית לכל x

ב.   מצא את הפונקציה f(x).

פתרון

ב. כיוון שהישר משיק ← נשווה את שיפועו לנגזרת!

$$\frac{1-e^x}{x-e^x}=1$$

$$1-e^x=x-e^x$$

ב. מצא את הפונקציה f(x).

פתרון

$$x = 1$$

נקודת ההשקה $(1, 1+\ln(e-1))$

$$\int \frac{1-e^x}{x-e^x}dx = \ln(e^x - x) + C$$

$$f(x) = \ln(e^x - x) + C$$

$$1 + \ln(e-1) = \ln(e^1 - 1) + C$$

ב. מצא את הפונקציה f(x).

פתרון

$$C = 1$$

$$f(x) = \ln(e^x - x) + 1$$

ג. A היא נקודה על גרף הפונקציה $f(x)$ ו-B היא נקודה על הישר $y = x$. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון

ג. נגדיר את פונקציית המטרה כאורך של הקטע AB:

כאשר הקטע המינימלי יתקבל ע"י הנוסחה של מרחק נקודה מישר!

כיוון שכהגדרה, האורך המינימלי הוא האנך - ולכן פונקציית המטרה

שלנו היא:

$$y = \frac{-1 \cdot t + 1 \cdot \ln(e^t - t) + 1 + 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{-t + \ln(e^t - t) + 1}{\sqrt{2}}$$

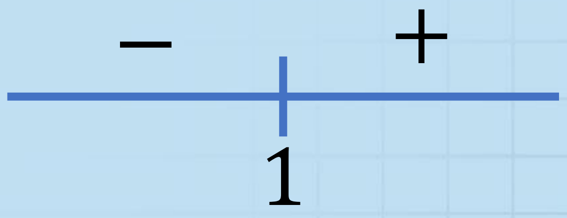
ג. A היא נקודה על גרף הפונקציה $f(x)$ ו-B היא נקודה על הישר $y = x$. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{e^t - 1}{(e^t - t) \cdot \sqrt{2}} = 0$$

$$-e^t + t + e^t - 1 = 0$$

ונקבל: $t = 1$



מינימום

ולכן האורך המינימלי: $y = \dfrac{\ln(e-1)}{\sqrt{2}}$

בהצלחה