הקנייה

בעיות קיצון בהנדסת המישור

3 יח"ל

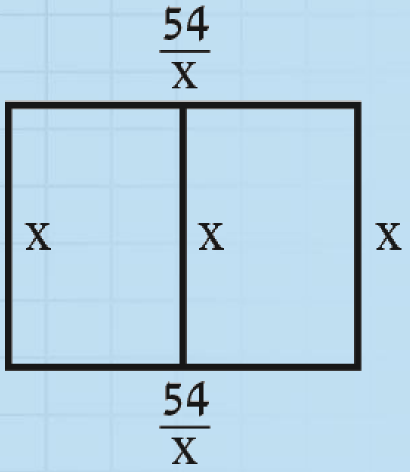
המצגת נערכה ע״י עומרי נווה

הקנייה

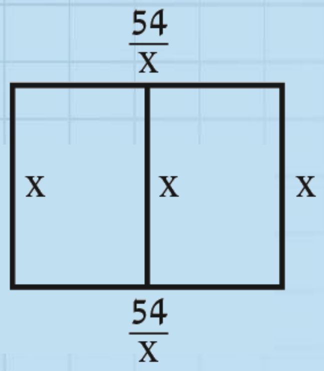
בעיות קיצון בהנדסת המישור – פונקציות רציונאליות

דוגמא

רוצים לבנות מחוט מסגרת מלבנית ששטחה 54 סמ"ר ובתוכה להעביר מחיצה. חשב את אורך החוט המינימלי הדרוש.



הקנייה



פתרון:

המשתנים – צלעות המסגרת המלבנית, הקבוע – שטח המסגרת.

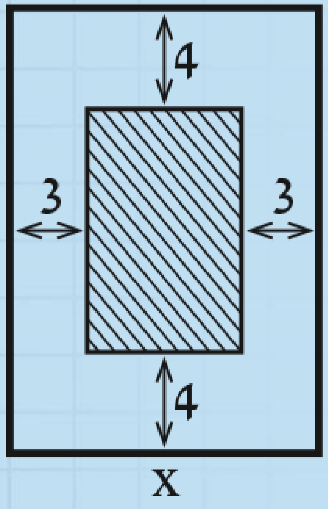
נסמן ב-x צלע אחת של המלבן החיצוני ואז הצלע השנייה היא $\frac{54}{x}$. נסמן ב-y את אורך החוט הדרוש ונקבל $y = 3x+2\cdot\frac{54}{x}$. נגזור ונשווה לאפס $y' = 3-\frac{108}{x^2} = 0$.
לכן $x^2 = \frac{108}{3} = 36$. מכאן $x = 6$. הנגזרת השנייה היא $y'' = \frac{216}{x^3}$, אם נציב בה $x = 6$ נקבל $y'' > 0$, כלומר זהו מינימום.

לסיכום: צלעות המלבן החיצוני הן 6 ס"מ ו-9 ס"מ $= \frac{54}{6}$. האורך המינימלי של החוט הוא $y = 3\cdot6+2\cdot9 = 36$ ס"מ (מינימום).

הקנייה

בתוך מלבן חיצוני ששטחו 300 סמ"ר נמצא מלבן פנימי שצלעותיו מקבילות לצלעות המלבן החיצוני. רוחב השוליים הצרים מכל צד הוא 3 ס"מ ורוחב השוליים הרחבים מכל צד הוא 4 ס"מ.

נסמן ב-x את אחת מצלעות המלבן החיצוני. (ראה ציור).



א. הבע באמצעות x את שטח המלבן הפנימי.

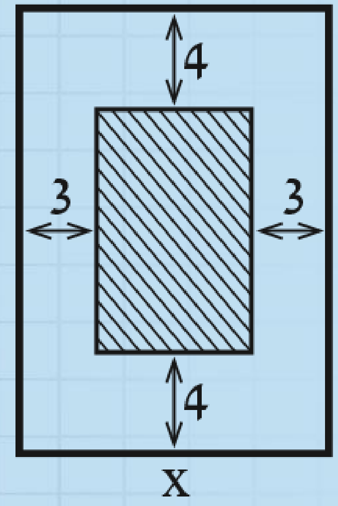
ב. מצא את צלעותיו של המלבן החיצוני עבורו שטח המלבן הפנימי הוא מקסימלי.

ג. מצא את השטח המקסימלי של המלבן הפנימי.

הקנייה

מלבן חיצוני ששטחו 300 סמ"ר

א. הבע באמצעות x את שטח המלבן הפנימי.



$\frac{300}{x}$

אם צלע המלבן היא x ושטחו 300 סמ"ר

אז צלעו השנייה היא $\frac{300}{x}$.

ולכן, צלעות המלבן הפנימי הן:

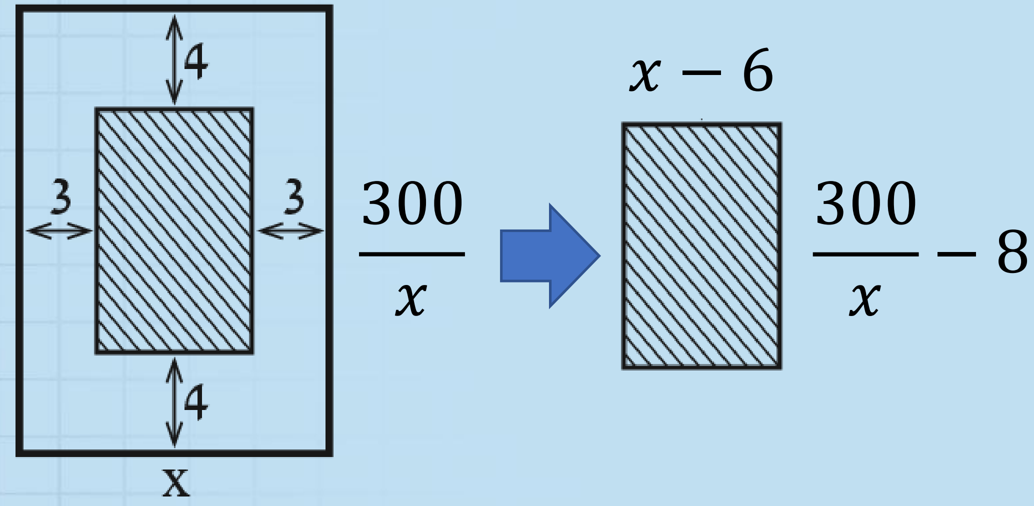
צלע אחת: $x-6$

צלע שנייה: $\frac{300}{x}-8$

הקנייה

מלבן חיצוני ששטחו 300 סמ"ר

א. הבע באמצעות x את שטח המלבן הפנימי.



שטח המלבן הפנימי:

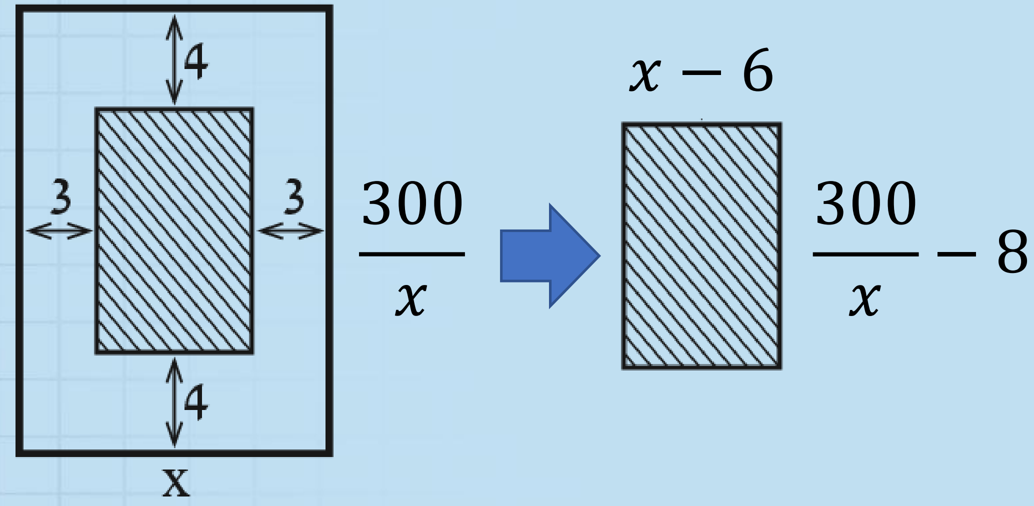
$$y=(x-6)\left(\frac{300}{x}-8\right)$$

$$=300-8x-\frac{1{,}800}{x}+48$$

הקנייה

מלבן חיצוני ששטחו 300 סמ"ר

א. הבע באמצעות x את שטח המלבן הפנימי.

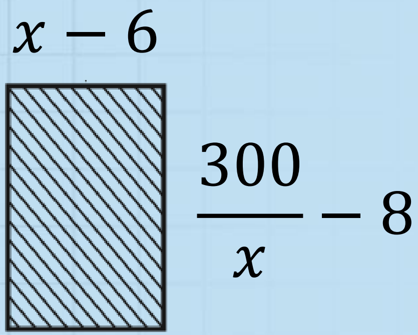


שטח המלבן הפנימי:

$$y = 348 - 8x - \frac{1,800}{x}$$

הקנייה

ב. מצא את צלעותיו של המלבן החיצוני עבורו שטח המלבן הפנימי הוא מקסימלי.



$$y = 348 - 8x - \frac{1,800}{x}$$ פונקציית שטח המלבן הפנימי

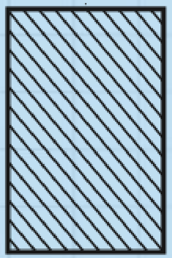
נגזור את פונקציית שטח המלבן הפנימי כדי למצוא ערך קיצון ונשווה לאפס:

$$y' = -8 + \frac{1,800}{x^2} = 0$$

הקנייה

ב. מצא את צלעותיו של המלבן החיצוני עבורו שטח המלבן הפנימי הוא מקסימלי.

$x-6$



$\frac{300}{x}-8$

$$-8+\frac{1{,}800}{x^2}=0 \ /\cdot x^2$$

$$-8x^2+1800=0 \ \ /+8x^2$$

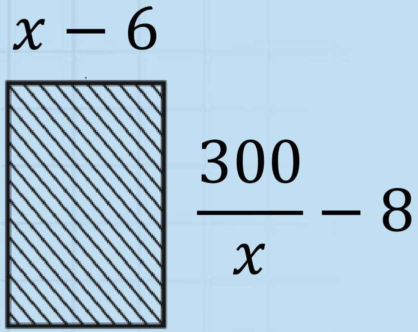
$$8x^2=1800 \ /:8$$

$$x^2=225$$

$\cancel{x_1=-15}$ $\quad$ $x_2=15$

הקנייה

ב. מצא את צלעותיו של המלבן החיצוני עבורו שטח המלבן הפנימי הוא מקסימלי.



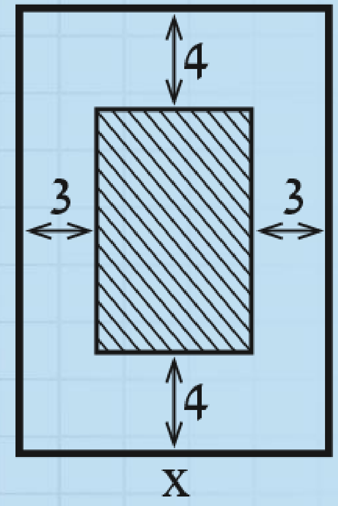
$$\boldsymbol{x = 15}$$

$$y' = -8 + \frac{1{,}800}{x^2}$$

$y'(14) = 1.18$ מקסימום $y'(16) = -0.96$

הקנייה

ב. מצא את צלעותיו של המלבן החיצוני עבורו שטח המלבן הפנימי הוא מקסימלי.



$\frac{300}{x}$

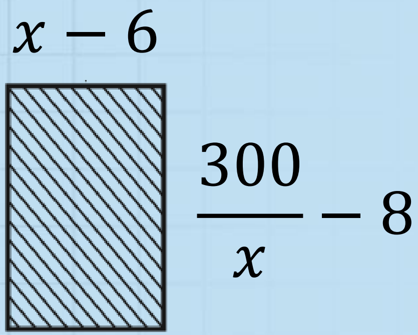
$x = 15$ ✓

צלעות המלבן החיצוני עבורו שטח המלבן הפנימי הוא מקסימלי הן:

15 ס"מ ו- 20 ס"מ

הקנייה

ג. מצא את השטח המקסימלי של המלבן הפנימי.



$$\boldsymbol{x = 15}$$

צלעות המלבן הפנימי כאשר שטחו מקסימלי הן: 9 ס"מ ו- 12 ס"מ

ולכן שטחו המקסימלי של המלבן הפנימי הוא 108 סמ"ר.

בהצלחה