פתרון תרגיל

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

3 יח"ל

המצגת נערכה ע״י עומרי נווה

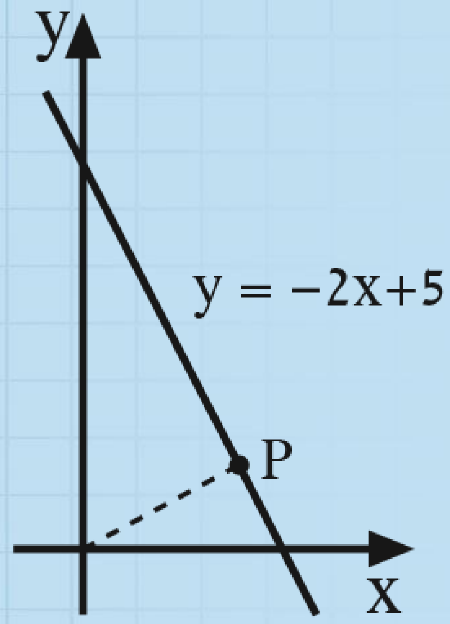
השאלה

P היא נקודה על הישר $y = -2x+5$. נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה P.

א. הבע באמצעות x את שיעור ה- y של הנקודה P.

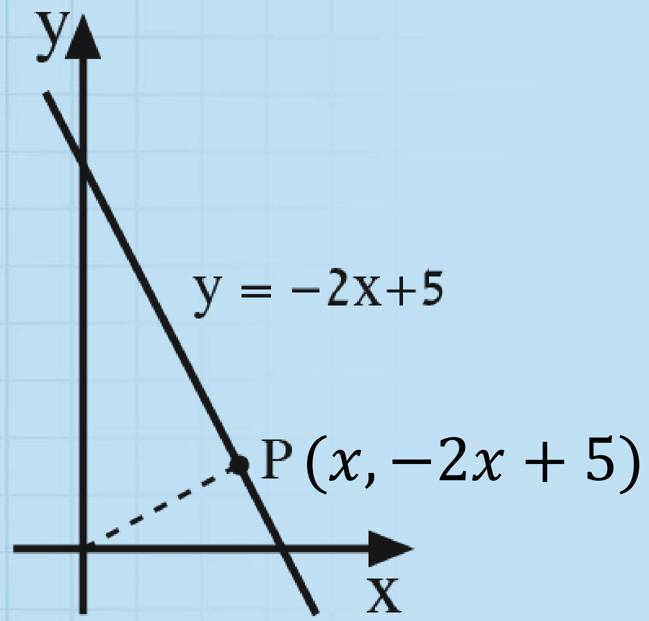
ב. הבע באמצעות x את **ריבוע** המרחק של הנקודה P מראשית הצירים. (**הדרכה:** ריבוע המרחק בין הנקודות (x_1 , y_1) ו- (x_2 , y_2) הוא $d^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$).

ג. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה ריבוע המרחק הנ"ל הוא מינימלי.



א. הבע באמצעות x את שיעור ה-y של הנקודה P.

פתרון

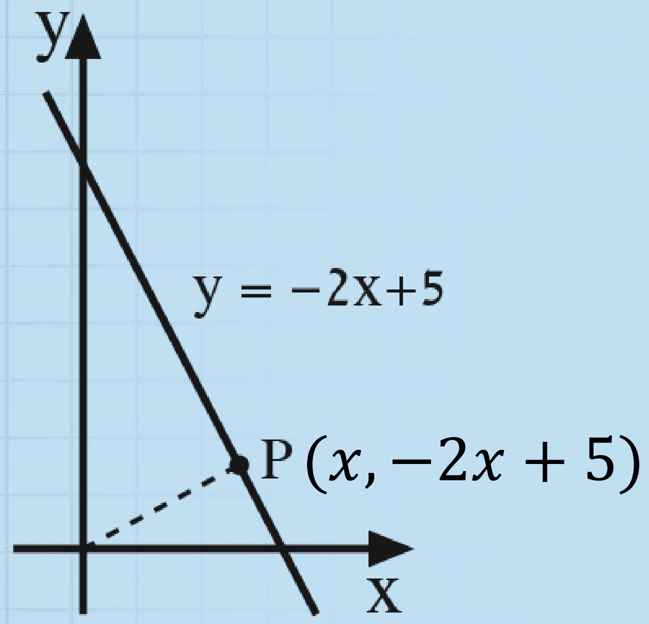


אם שיעור ה-x של נקודה P הוא x.

אז שיעור ה-y של נקודה P: $-2x + 5$

ב. הבע באמצעות x את **ריבוע** המרחק של הנקודה P מראשית הצירים.

פתרון



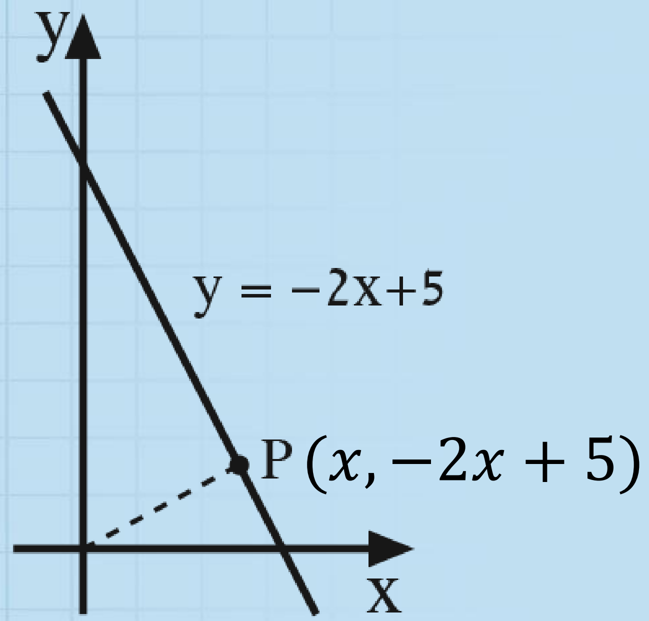
ניעזר בנוסחה למציאת מרחק בין נקודות:

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (-2x+5-0)^2}$$

$$d = \sqrt{x^2 + (-2x+5)^2}$$

ב. הבע באמצעות x את **ריבוע** המרחק של הנקודה P

פתרון



מרחק הנקודה P מראשית הצירים:

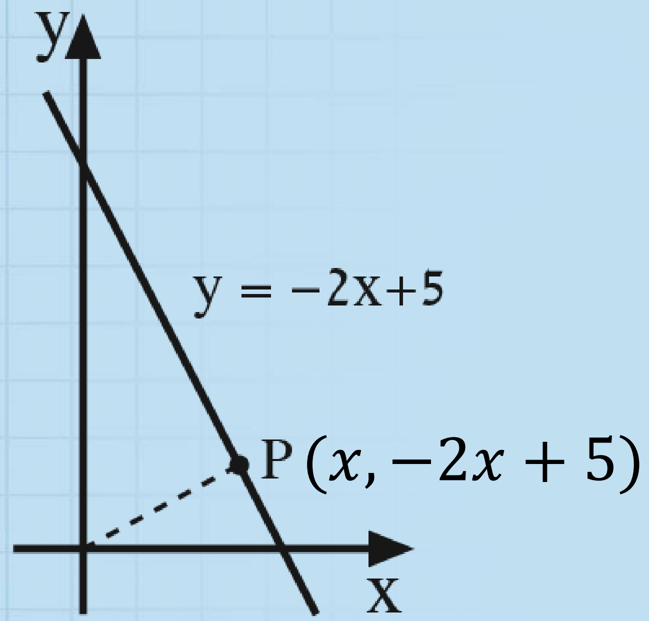
$$d = \sqrt{x^2 + (-2x+5)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x^2 - 20x + 25}$$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{5x^2 - 20x + 25}}$$

ב. הבע באמצעות x את **ריבוע** המרחק של הנקודה P

פתרון



מרחק הנקודה P מראשית הצירים:

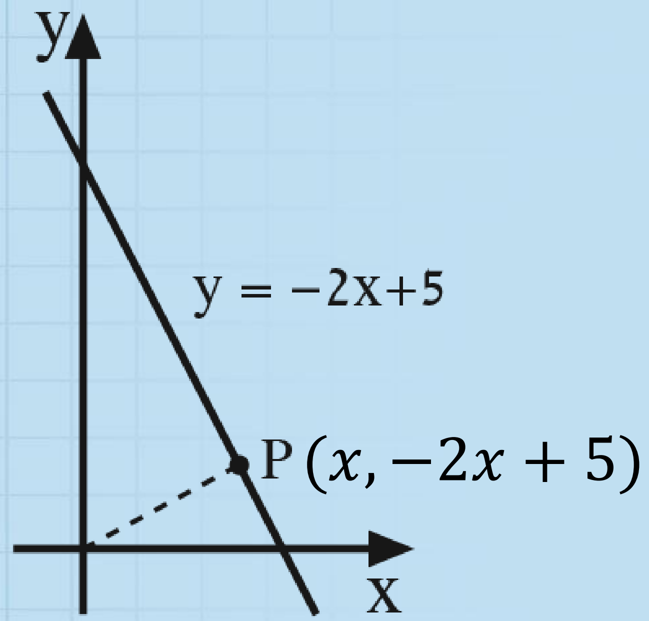
$$d = \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$$

ולכן, ריבוע המרחק של הנקודה P מראשית הצירים:

$$d^2 = 5x^2 - 20x + 25$$

ג. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה ריבוע המרחק הנ"ל הוא מינימלי.

פתרון



ריבוע המרחק של הנקודה P מראשית הצירים:

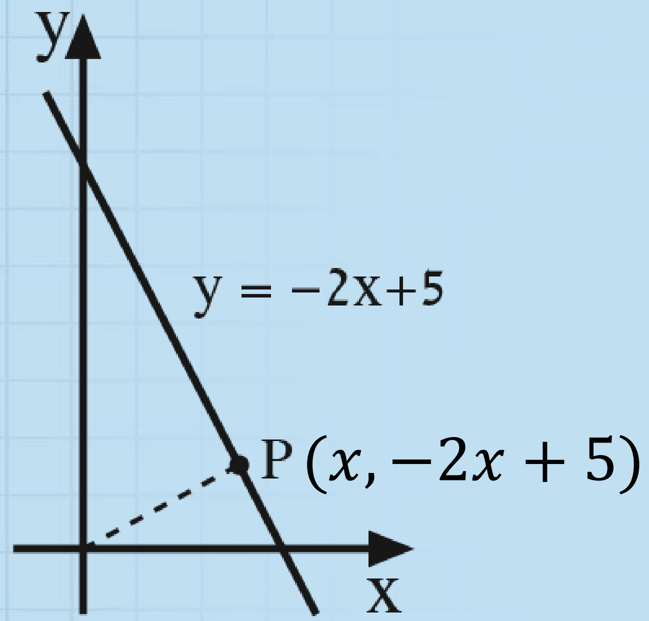
$$y = 5x^2 - 20x + 25$$

נחפש לפונקציית ריבוע המרחק ערך קיצון.

כלומר, נגזור ונשווה לאפס.

ג. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה ריבוע המרחק הנ"ל

פתרון



נגזור ונשווה לאפס.

$$y = 5x^2 - 20x + 25$$

$$y' = 10x - 20$$

$$10x - 20 = 0$$

$$10x = 20$$

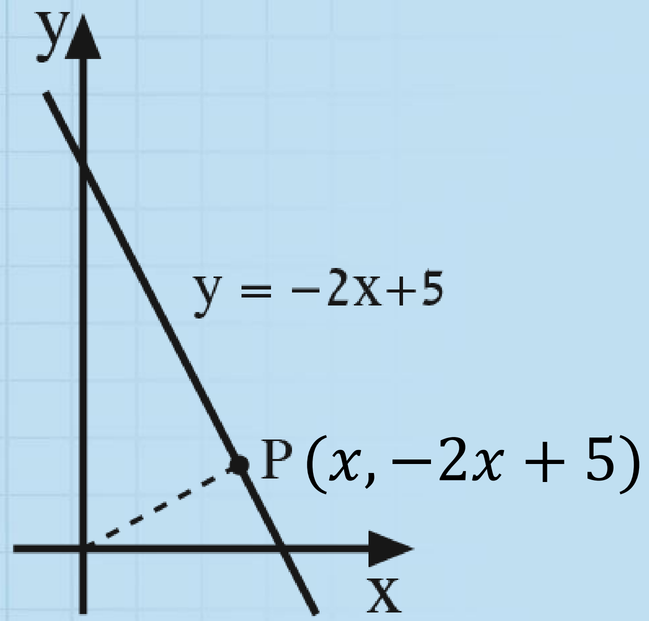
$$x = 2$$

ג. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה ריבוע המרחק הנ״ל

פתרון

נוודא שעבור $x = 2$ אכן מקבלים ערך מינימלי:

$$y' = 10x - 20$$



x	1	**2**	3
y	↘	**0**	↗
y'	$-$		$+$

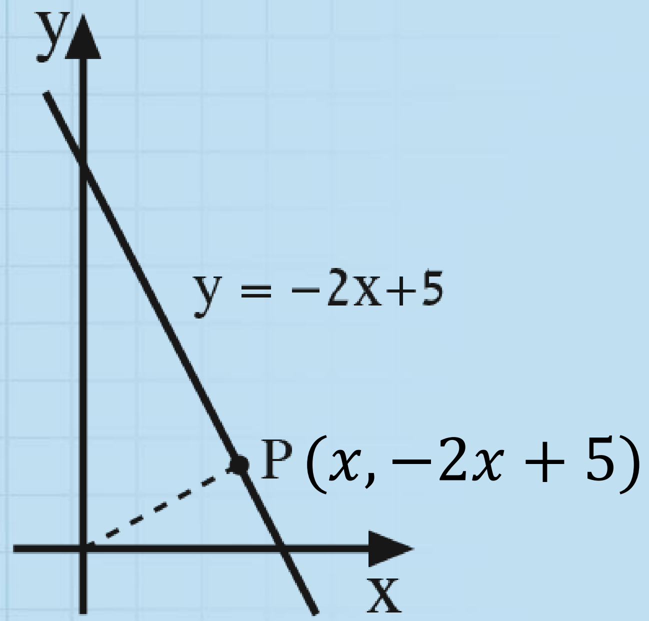
מינימום ✓

$$y'(1) = -10$$

$$y'(3) = 10$$

ג. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה ריבוע המרחק הנ"ל

פתרון



אפשר גם בעזרת נגזרת שנייה לוודא מינימום:

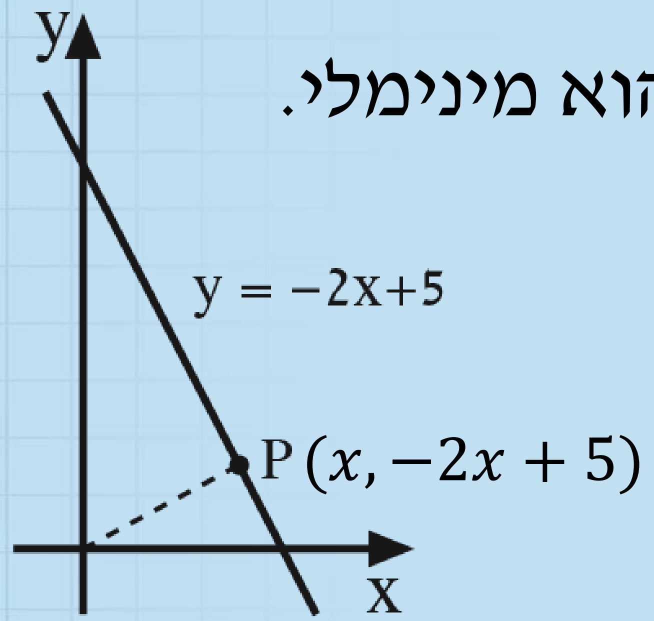
$$y = 5x^2 - 20x + 25$$

$$y' = 10x - 20$$

$$y'' = 10$$ מינימום

ג. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה ריבוע המרחק הנ״ל

פתרון



כאשר $x = 2$ ריבוע מרחק הנקודה P מראשית הצירים הוא מינימלי.

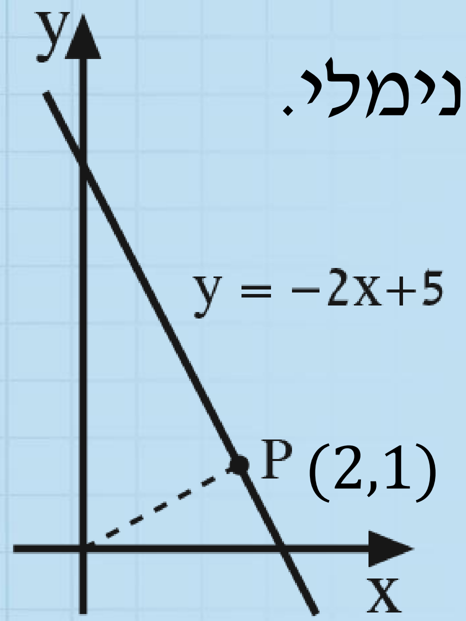
נמצא את ערך ה-y בנקודה P:

$$y = -2 \cdot 2 + 5 \ = 1$$

כלומר, שיעורי הנקודה P הם:

ג. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה ריבוע המרחק הנ"ל

פתרון



כאשר $x = 2$ ריבוע מרחק הנקודה P מראשית הצירים הוא מינימלי.

נמצא את ערך ה-y בנקודה P:

$$y = -2 \cdot 2 + 5 \ = 1$$

כלומר, שיעורי הנקודה P הם: $(2, 1)$

בהצלחה