פתרון תרגיל

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

3 יח"ל

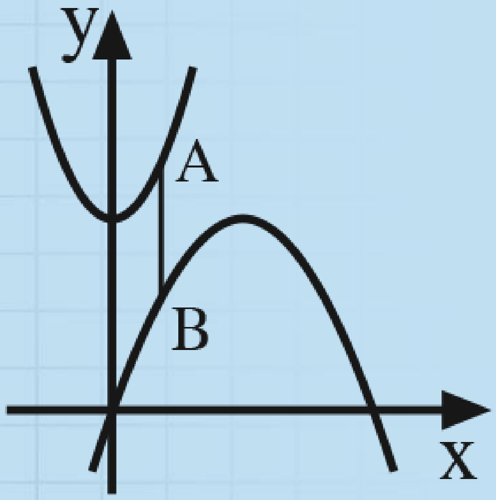
המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

השאלה

ישר המאונך לציר ה-x חותך את הגרפים של הפונקציות $y = \frac{1}{2}x^2+7$
ו-$y = -\frac{1}{4}x^2+3x$ בנקודות A ו-B בהתאמה כמתואר בציור.

א. מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

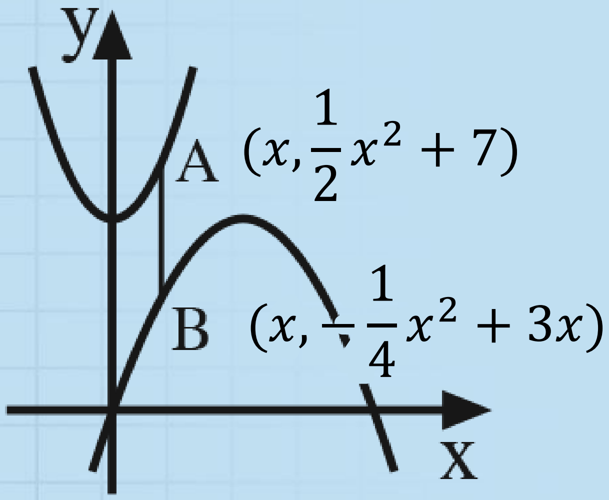
ב. האם יש קטע AB כנ"ל שהוא בעל אורך מקסימלי? נמק.



א. מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון

ישר המאונך לציר ה-x חותך את הגרפים של הפונקציות $y = \frac{1}{2}x^2+7$ ו-$y = -\frac{1}{4}x^2+3x$ בנקודות A ו-B בהתאמה כמתואר בציור.



נגדיר את ערך ה-x של נקודה A בתור x.

לכן, גם ערך ה-x של נקודה B הוא x.

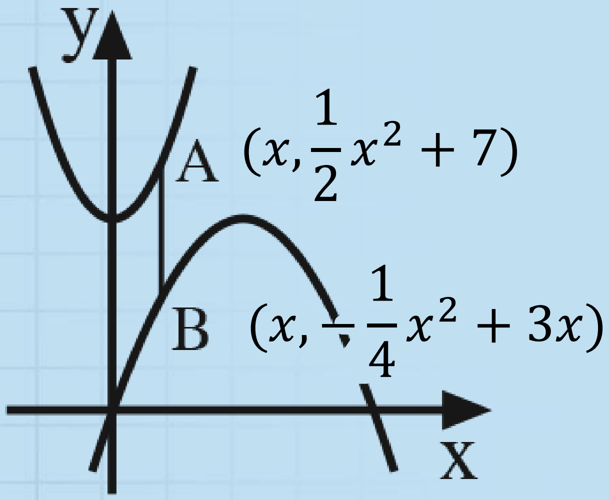
ערך ה-y של נקודה A: $\frac{1}{2}x^2 + 7$

ערך ה-y של נקודה B: $-\frac{1}{4}x^2 + 3x$

א. מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון

אורך הקטע AB הוא הפרשי ערכי ה-y בנקודות:



$$AB=\frac{1}{2}x^2+7-(-\frac{1}{4}x^2+3x)$$

$$=\frac{1}{2}x^2+7+\frac{1}{4}x^2-3x$$

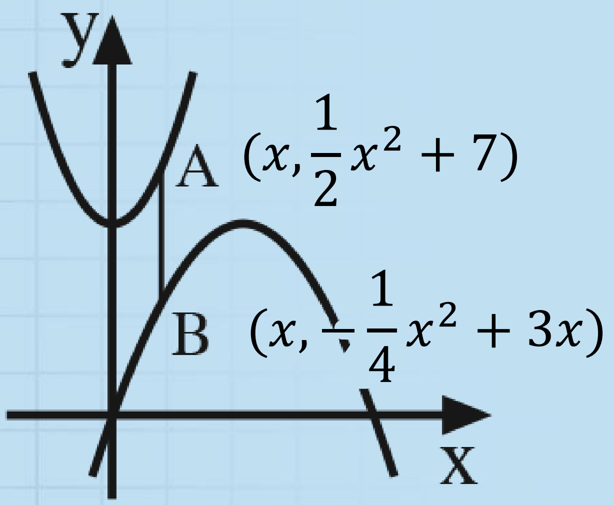
$$=\frac{3}{4}x^2-3x+7$$

א. מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון

נחפש לפונקציה המבטאת את אורך AB ערך קיצון.

נגזור ונשווה לאפס.



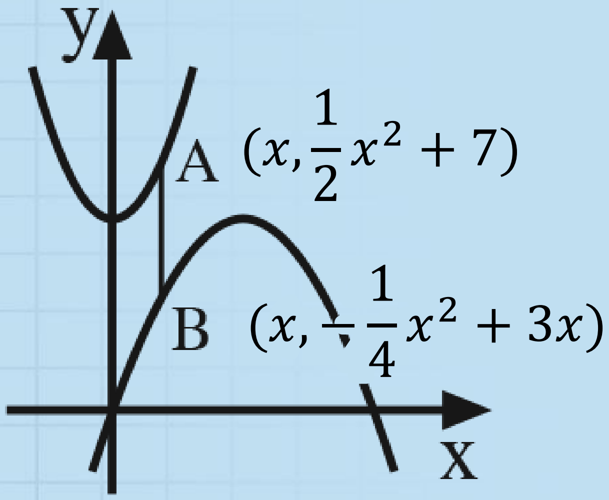
$$y = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 7$$

$$y' = 1.5x - 3$$

$$1.5x - 3 = 0$$

א. מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון



$$y' = 1.5x - 3$$

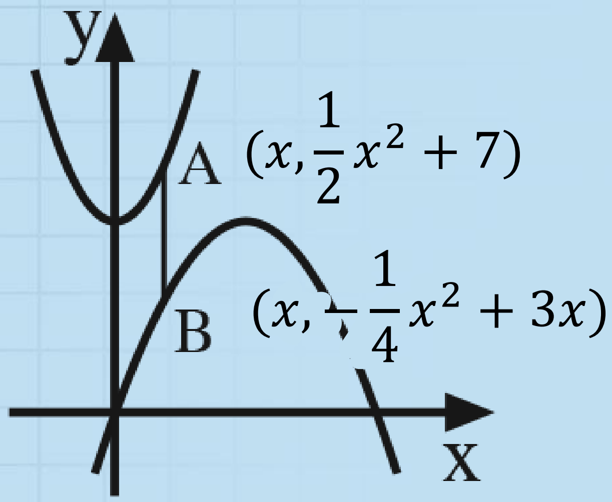
$$1.5x - 3 = 0$$

$$1.5x = 3 \;/: 1.5$$

$$x = 2$$

א. מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון



נוודא שעבור $x=2$ אכן מקבלים ערך מינימלי:

$$y' = 1.5x - 3$$

$$y'(1) = -1.5$$

$$y'(3) = 1.5$$

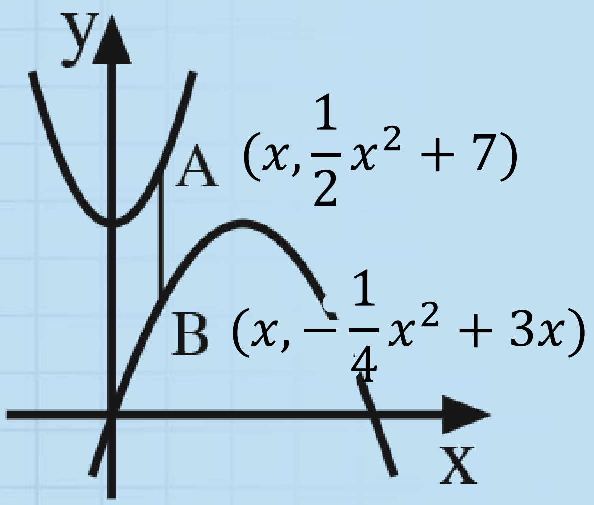
x	1	**2**	3
y	↘	**0**	↗
y'	$-$		$+$

מינימום ✓

א. מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון

אפשר גם בעזרת נגזרת שנייה לוודא מינימום:



$$y = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 7$$

$$y' = 1.5x - 3$$

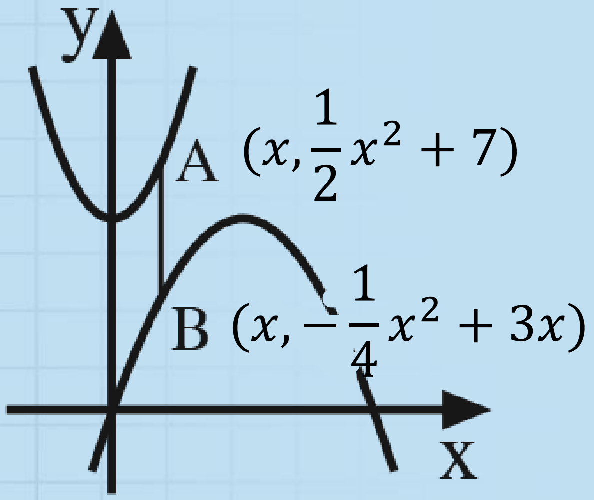
$$y'' = 1.5$$ מינימום

א. מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון

האורך המינימלי של הקטע AB מתקיים כאשר $x = 2$

נציב את ערך ה-x בכדי למצוא את הנקודות.



ערך ה-y של נקודה A:

$$\frac{1}{2}x^2 + 7 = 9$$

ערך ה-y של נקודה B:

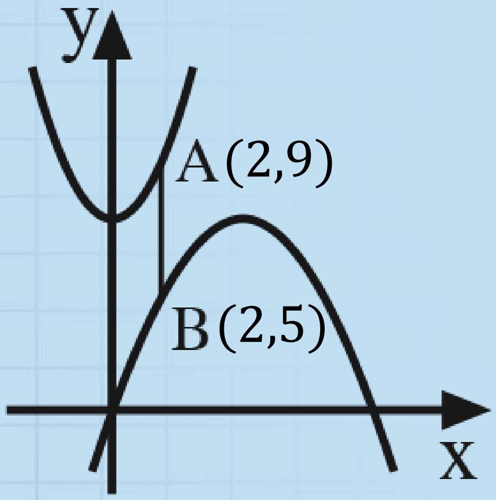
$$-\frac{1}{4}x^2 + 3x = 5$$

א. מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון

האורך המינימלי של הקטע AB מתקיים כאשר $x = 2$

נציב את ערך ה-x בכדי למצוא את הנקודות.

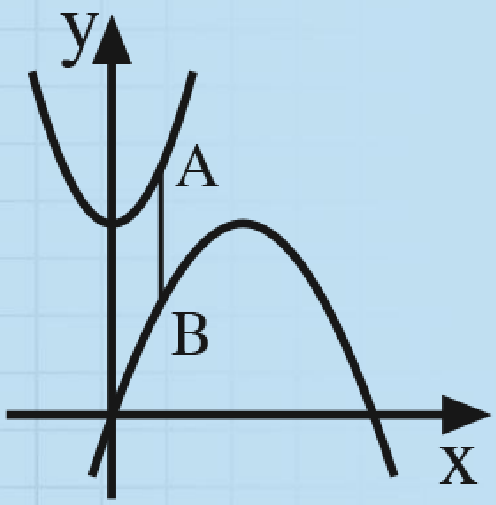


האורך המינימלי של הקטע AB הוא 4 ס"מ.

ב. האם יש קטע AB כנ״ל שהוא בעל אורך מקסימלי? נמק.

פתרון

מכיוון שמצאנו רק ערך אחד לקיצון והוא מינימום,
ניתן להסיק שאין קטע AB בעל אורך מקסימלי.



בהצלחה