פתרון תרגיל

סדרות כלליות – תרגילים נוספים עם כלל הנסיגה

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 189, ת. 28

המצגת נערכה ע״י עומרי נווה

השאלה

28) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה $a_{n+1} = (a_n+1)(n+1)$.

א. הוכח שהסדרה שמקיימת את הכלל $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n+1}$ היא סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא 1.

ב. מצא את b_1.

ג. נתון שסכום 11 האיברים הראשונים של סדרת ה-b_n גדול ב-66 מהסכום a_1+a_2.
מצא את a_1.

א. הוכח שהסדרה שמקיימת את הכלל $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n+1}$ היא סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא 1.

פתרון

סדרה מקיימת את כלל הנסיגה $a_{n+1} = (a_n+1)(n+1)$.

נראה ש b_n חשבונית:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}+1} - \frac{a_{n+1}}{a_n+1} =$$

$$= \frac{\cancel{(a_{n+1}+1)}(n+1+1)}{\cancel{a_{n+1}+1}} - \frac{\cancel{(a_n+1)}(n+1)}{\cancel{a_n+1}}$$

א. הוכח שהסדרה שמקיימת את הכלל $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n+1}$ היא סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא 1.

פתרון

סדרה מקיימת את כלל הנסיגה $a_{n+1} = (a_n+1)(n+1)$.

נראה ש b_n חשבונית:

$$b_{n+1} - b_n = n + 2 - n - 1 = 1$$

כלומר, הסדרה b_n היא סדרה חשבונית והפרשה הוא 1.

ב. מצא את b_1.

פתרון

לפי הנתון: $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n+1}$ ו- $a_{n+1} = (a_n+1)(n+1)$.

ולכן:

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1+1} = \frac{\cancel{(a_1+1)}(1+1)}{\cancel{a_1+1}} = 2$$

כלומר: $\boldsymbol{b_1 = 2}$

ג. נתון שסכום 11 האיברים הראשונים של סדרת ה-b_n גדול ב-66 מהסכום a_1+a_2.
מצא את a_1.

פתרון

$a_{n+1} = (a_n+1)(n+1)$.

$b_1 = 2$

$d = 1$

לפי הנתון:

$$S_{11} = 66 + a_1 + a_2$$

$$\frac{11}{2}[2 \cdot 2 + (11-1) \cdot 1] = 66 + a_1 + (a_1+1)(1+1)$$

$$77 = 66 + a_1 + 2a_1 + 2$$

$$3a_1 = 9 \longrightarrow a_1 = 3$$

בהצלחה