תרגיל לדוגמה

סדרות כלליות – תרגילים נוספים עם כלל הנסיגה

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 184–185,

דוגמאות א' , ב'

תרגיל לדוגמה

סדרות כלליות — תרגילים נוספים עם כלל נסיגה

סעיף זה כולל תרגילים יותר מורכבים שברובם נתונה סדרה כללית המוגדרת בעזרת כלל נסיגה. מהסדרה הכללית מגדירים סדרה **חדשה** שהיא סדרה חשבונית או הנדסית ובדרך כלל צריך יהיה להוכיח זאת. היות והאיבר הכללי של הסדרה החשבונית או ההנדסית ידוע אז ניתן לענות על שאלות שונות הקשורות לסדרה החשבונית או לסדרה ההנדסית החדשה שהתקבלה.

הערה: בעזרת האיבר הכללי של הסדרה החשבונית או ההנדסית **החדשה** שהתקבלה ניתן גם **למצוא** את האיבר הכללי של הסדרה **הנתונה**. אלא שנושא זה **לא** בתוכנית הלימודים ולכן סעיפי ג׳ שבשתי הדוגמאות הבאות הם לא בתוכנית הלימודים.

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

סדרה מוגדרת ע"י כלל נסיגה: $a_1 = 7$, $a_{n+1} = 3a_n - 10$.

א. הוכח שהסדרה המוגדרת ע"י הכלל $b_n = a_n - 5$ היא סדרה הנדסית.

ב. מצא את הנוסחה ל-b_n.

ג. מצא את הנוסחה ל-a_n.

פתרון:

א. כדי להוכיח שסדרה היא סדרה הנדסית צריך להוכיח שהיחס בין כל איבר לאיבר הקודם לו הוא קבוע ולא תלוי ב-n. נקבל:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}-5}{a_n-5} = \frac{3a_n-10-5}{a_n-5} = \frac{3a_n-15}{a_n-5} = \frac{3(a_n-5)}{a_n-5} = 3,$$

כלומר, סדרת ה-b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא 3.

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

סדרה מוגדרת ע"י כלל נסיגה: $a_1 = 7$, $a_{n+1} = 3a_n - 10$.

א. הוכח שהסדרה המוגדרת ע"י הכלל $b_n = a_n - 5$ היא סדרה הנדסית.

ב. מצא את הנוסחה ל-b_n.

ג. מצא את הנוסחה ל-a_n.

פתרון:

סדרת ה-b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא 3.

ב. עפ"י הנתון $a_1 = 7$ לכן $b_1 = a_1 - 5 = 7-5 = 2$. מכאן שהנוסחה ל-b_n (איבר כללי של סדרה הנדסית) היא: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

סדרה מוגדרת ע"י כלל נסיגה: $a_1 = 7$, $a_{n+1} = 3a_n - 10$.

א. הוכח שהסדרה המוגדרת ע"י הכלל $b_n = a_n - 5$ היא סדרה הנדסית.

ב. מצא את הנוסחה ל-b_n.

ג. מצא את הנוסחה ל-a_n.

פתרון:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$.

ג. עפ"י הנתון $b_n = a_n - 5$ לכן $a_n = b_n + 5$. עכשיו נוכל למצוא את הנוסחה ל-a_n: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 5$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

סדרה, שבה $a_1 \neq 0$, מוגדרת ע"י כלל נסיגה: $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$.

א. מגדירים סדרה ע"י $b_n = \frac{1-3a_n}{a_n}$. הוכח שסדרת ה-b_n היא סדרה חשבונית.

ב. נתון: $a_1 = \frac{1}{2}$. מצא את הנוסחה ל-b_n.

ג. מצא את הנוסחה ל-a_n.

פתרון:

א. כדי להוכיח שסדרה היא סדרה חשבונית צריך להוכיח שההפרש בין כל איבר לאיבר הקודם לו הוא קבוע ואינו תלוי ב-n. נקבל:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1-3a_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{1-3a_n}{a_n} = \frac{1-\frac{3a_n}{2a_n+1}}{\frac{a_n}{2a_n+1}} - \frac{1-3a_n}{a_n} = \frac{2a_n+1-3a_n}{a_n} - \frac{1-3a_n}{a_n} =$$

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

סדרה, שבה $a_1 \neq 0$, מוגדרת ע"י כלל נסיגה: $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$.

א. מגדירים סדרה ע"י $b_n = \frac{1-3a_n}{a_n}$. הוכח שסדרת ה- b_n היא סדרה חשבונית.

ב. נתון: $a_1 = \frac{1}{2}$. מצא את הנוסחה ל- b_n.

ג. מצא את הנוסחה ל- a_n.

פתרון:

א. כדי להוכיח שסדרה היא סדרה חשבונית צריך להוכיח שההפרש בין כל איבר לאיבר הקודם לו הוא קבוע ואינו תלוי ב-n. נקבל:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2a_n+1-3a_n}{a_n} - \frac{1-3a_n}{a_n} = \frac{1-a_n-1+3a_n}{a_n} = \frac{2a_n}{a_n} = 2$$

כלומר, סדרת ה- b_n היא סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא 2.

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

סדרה, שבה $a_1 \neq 0$, מוגדרת ע"י כלל נסיגה: $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$.

א. מגדירים סדרה ע"י $b_n = \frac{1-3a_n}{a_n}$. הוכח שסדרת ה- b_n היא סדרה חשבונית.

ב. נתון: $a_1 = \frac{1}{2}$. מצא את הנוסחה ל- b_n.

ג. מצא את הנוסחה ל- a_n.

פתרון:

ב. עפ"י הנתון $a_1 = \frac{1}{2}$ לכן $b_1 = \frac{1-3\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1-1\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$.

כמו כן, לפי סעיף א' $d = 2$. מכאן (איבר כללי של סדרה חשבונית):

$b_n = b_1+(n-1)d = -1+(n-1)2 = 2n-3$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

סדרה, שבה $a_1 \neq 0$, מוגדרת ע"י כלל נסיגה: $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$.

א. מגדירים סדרה ע"י $b_n = \frac{1-3a_n}{a_n}$. הוכח שסדרת ה- b_n היא סדרה חשבונית.

ב. נתון: $a_1 = \frac{1}{2}$. מצא את הנוסחה ל- b_n.

ג. מצא את הנוסחה ל- a_n.

פתרון:

ג. נעבור למציאת a_n: עפ"י ההגדרה $b_n = \frac{1-3a_n}{a_n}$,

נהפוך את a_n לנושא הנוסחה ונקבל $a_n = \frac{1}{b_n+3}$,

לכן $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n-3+3} = a_n$.

בהצלחה