תרגיל לדוגמה

הסכום של סדרה חשבונית

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 103–104, דוגמאות ג' , ד'

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

תרגיל לדוגמה

$$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$$

$$\boxed{S_n = [2a_1 + (n-1)d]\frac{n}{2}}$$

$$S_n = [2a_n - (n-1)d]\frac{n}{2}$$

דוגמא ג׳ (מציאת הנוסחה ל-S_n):

נתונה הסדרה החשבונית $1, 5, 9, \ldots$. מצא את הנוסחה ל-S_n.

פתרון:

עפ״י הנתון $a_1 = 1$, $d = 4$ ולכן:

$$S_n = [2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 4]\frac{n}{2} = (2 + 4n - 4)\frac{n}{2} = (4n-2)\frac{n}{2} = 2n^2 - n$$

ז״א $S_n = 2n^2 - n$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא ד׳ (מציאת הנוסחה ל- a_n והוכחה שהסדרה היא חשבונית):

סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא $S_n = 2n^2 - 3n$. מצא את הנוסחה לאיבר ה- n והוכח שהסדרה היא סדרה חשבונית.

פתרון:

עפ״י ההגדרה של S_n תמיד מתקיים: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_n$, מכאן נקבל:

$a_n = S_n - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1})$. אולם $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = S_{n-1}$,

לכן עבור $n \geq 2$ נקבל את הקשר הבא: $\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$.

הערה: נוסחה זו נכונה ל- $n \geq 2$ וצריך לבדוק לחוד אם מתקיים $S_1 = a_1$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא ד׳ (מציאת הנוסחה ל- a_n והוכחה שהסדרה היא חשבונית):

סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא $S_n = 2n^2-3n$. מצא את הנוסחה לאיבר ה-n והוכח שהסדרה היא סדרה חשבונית.

פתרון:

נמצא עכשיו את הנוסחה ל- a_n $(n \geq 2)$:

נקבל: $a_n = S_n-S_{n-1} = 2n^2-3n-(2(n-1)^2-3(n-1)) = 2n^2-3n-2n^2+4n-2+3n-3 = 4n-5$.

כלומר קיבלנו $a_n = 4n-5$ $n \geq 2$.

כפי שכבר ראינו, כדי להוכיח שהסדרה היא חשבונית יש להראות תחילה שההפרש בין כל איבר (פרט לראשון) לקודם לו הוא קבוע ואינו תלוי ב-n.

עבור $n \geq 2$ מתקיים: $a_n-a_{n-1} = 4n-5-(4(n-1)-5) = 4n-5-4n+4+5 = 4$.

עכשיו צריך לבדוק אם מתקיים $a_1 = S_1$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא ד' (מציאת הנוסחה ל- a_n והוכחה שהסדרה היא חשבונית):

סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא $S_n = 2n^2-3n$. מצא את הנוסחה לאיבר ה-n והוכח שהסדרה היא סדרה חשבונית.

פתרון:

עכשיו צריך לבדוק אם מתקיים $a_1 = S_1$.

במקרה זה, ע"י הצבת $n = 1$ נקבל $a_1 = 4\cdot1-5 = -1$ וגם $S_1 = 2\cdot1^2-3\cdot1 = -1$,

כלומר $a_1 = S_1$. (אם $a_1 \neq S_1$ וההפרש הנ"ל קבוע אז הסדרה היא סדרה חשבונית רק החל מהאיבר השני).

לסיכום: קיבלנו סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא 4 ואיברה הראשון הוא -1.

בהצלחה