הקנייה

נגזרת הפונקציה $f(x) = a^x$ ושימושיה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 262–263

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

הקנייה

בסעיף זה נלמד לגזור פונקציה מעריכית מהצורה $f(x) = a^x$ $(a > 0$, $a \neq 1)$.

נזכיר שוב את מושג **הלוגריתם הטבעי**.

הגדרה:

הלוגריתם הטבעי – לוגריתם של x לפי בסיס e נקרא הלוגריתם הטבעי ומסומן $\ln x$.

כלומר:

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

הקנייה

נמצא עכשיו את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = a^x$.

תחילה ניעזר בנוסחה $\mathbf{a^{\log_a x} = x}$ (ראה עמ' 119). עפ"י הנוסחה מתקיים $\mathbf{e^{\ln a} = a}$.

מכאן נקבל עפ"י חוק החזקה $(a^n)^m = a^{nm}$: $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$.

נעבור לנגזרת:

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)' = e^{x\ln a}\cdot\ln a = (e^{\ln a})^x\cdot\ln a = a^x\ln a.$$

הקנייה

לסיכום **קיבלנו את הנוסחה:** $\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$ $(a \neq 1 \quad ,a > 0)$

בעזרת הנגזרת של **פונקציה מורכבת** נקבל גם את הנוסחה הבאה:

$$\boxed{\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \ln a}$$

הקנייה

דוגמא:

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2^x}{x-1}$. מצא את:

א. תחום ההגדרה.

ב. האסימפטוטה האנכית לציר ה-x.

ג. נקודת הקיצון.

ד. תחומי העלייה והירידה.

הקנייה

$f(x) = \dfrac{2^x}{x-1}$.

פתרון:

א. תחום ההגדרה – המכנה $x-1$ של הפונקציה שווה לאפס כאשר $x = 1$ ולכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq 1$.

ב. אסימפטוטה אנכית – אם $x = 1$ אז המכנה של הפונקציה שווה לאפס והמונה שונה מאפס, לכן הישר $x = 1$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

הקנייה

$$.f(x) = \frac{2^x}{x-1}$$

ג. נקודת הקיצון –

נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס, נקבל: $.f'(x) = \frac{2^x \ln 2 (x-1) - 2^x}{(x-1)^2} = 0$

נוציא את 2^x כגורם משותף ונקבל $.2^x(x\ln 2 - \ln 2 - 1) = 0$ לכן $x\ln 2 = \ln 2 + 1$

ומכאן $.x = \frac{\ln 2+1}{\ln 2} = 2.44$ בעזרת הנגזרת השנייה נקבל שזאת נקודת מינימום.

שיעור ה-y הוא: $.y = \frac{2^{2.44}}{2.44-1} = 3.77$

לסיכום: לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $.(2.44\,,3.77)$

הקנייה

$.f(x) = \frac{2^x}{x-1}$

ד. **עלייה וירידה** – בהתחשב בנקודת המינימום ו**בתחום ההגדרה** של הפונקציה, שהוא $x \neq 1$, נקבל: הפונקציה עולה בתחום $x > 2.44$ והיא יורדת בתחום $1 < x < 2.44$ או $x < 1$.

בהצלחה