# פתרון תרגיל

## פונקציות לוגריתמיות – תרגילים לחזרה

### מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

**582 , עמ' 337, ת. 10**

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

# השאלה

**10)** לפונקציה $f(x) = (\ln x)^n e^{-(\ln x)^2}$ ($n$ מספר טבעי) יש נקודת קיצון ב- $x = e$.

א. מצא את $n$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

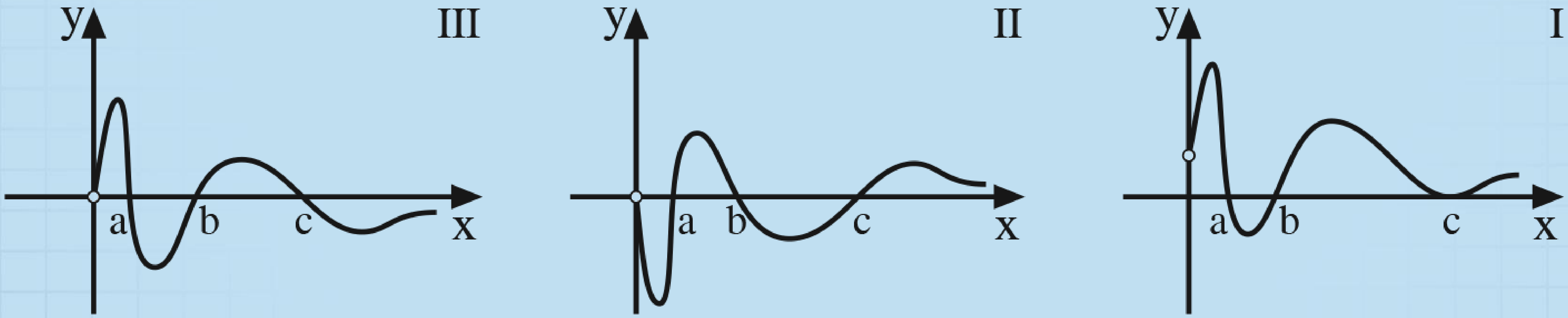
# השאלה

ו. לפניך שלושה גרפים: I, II, III.

(1) קבע איזה גרף מתאר את הפונקציה הנגזרת $f'(x)$. נמק.

(2) מצא את $a$, $b$ ו-$c$ בגרף המתאים לנגזרת $f'(x)$.

(3) היעזר בגרף המתאים לנגזרת $f'(x)$ וקבע כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.



לפונקציה $f(x)=(\ln x)^n e^{-(\ln x)^2}$ ($n$ מספר טבעי) יש נקודת קיצון ב-$x=e$.

א. מצא את $n$.

# פתרון

$$\boldsymbol{f'(e)=0}$$

$$f'(x)=n\cdot(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\cdot e^{-(\ln x)^2}+(\ln x)^n\cdot e^{-(\ln x)^2}\cdot(-2\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$f'(e)=n\cdot(1)^{n-1}\cdot\frac{1}{e}\cdot e^{-(1)^2}+(1)^n\cdot e^{-(1)^2}\cdot(-2\cdot1)\cdot\frac{1}{e}=0$$

לפונקציה $f(x)=(\ln x)^n e^{-(\ln x)^2}$ ($n$ מספר טבעי) יש נקודת קיצון ב-$x=e$.

א. מצא את $n$.

# פתרון

$$f'(e)=n\cdot(1)^{n-1}\cdot\frac{1}{e}\cdot e^{-(1)^2}+(1)^n\cdot e^{-(1)^2}\cdot(-2\cdot 1)\cdot\frac{1}{e}=0$$

$$n\cdot\frac{1}{e^2}-2\cdot\frac{1}{e^2}=0$$

$$\boldsymbol{n=2}$$

$f(x) = (\ln x)^2 \cdot e^{-(\ln x)^2}$ ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

# פתרון

**תחום הגדרה:** $0 < x$

**נדרוש** $y = 0$

$$(\ln x)^2 \cdot e^{-(\ln x)^2} = 0$$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

$(1, 0)$

$f(x) = (\ln x)^2 \cdot e^{-(\ln x)^2}$ ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

# פתרון

**נדרוש** $f'(x) = 0$

$$f'(x) = n \cdot (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-(\ln x)^2} + (\ln x)^n \cdot e^{-(\ln x)^2} \cdot (-2\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-(\ln x)^2} + (\ln x)^2 \cdot e^{-(\ln x)^2} \cdot (-2\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה. $f(x) = (\ln x)^2 \cdot e^{-(\ln x)^2}$

# פתרון

$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-(\ln x)^2} + (\ln x)^2 \cdot e^{-(\ln x)^2} \cdot (-2\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-(\ln x)^2}[1 - (\ln x)^2] = 0$$

$$\ln x = 0 \qquad\qquad (\ln x)^2 = 1$$

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה. $f(x) = (\ln x)^2 \cdot e^{-(\ln x)^2}$

# פתרון

$\ln x = 1$

$\boldsymbol{x = e}$

$\ln x = 0$

$\boldsymbol{x = 1}$

$\ln x = -1$

$\boldsymbol{x = \frac{1}{e}}$

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת הראשונה בתחומים שיצרנו, תוך התחשבות בתחום ההגדרה

$f(x) = (\ln x)^2 \cdot e^{-(\ln x)^2}$ ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

# פתרון

**נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת הראשונה $f'(x)$**

$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-(\ln x)^2}[1-(\ln x)^2]$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = 0$ | ↗ | $x = \frac{1}{e}$ | ↘ | $x = 1$ | ↗ | $x = e$ | ↘ |
| | $f'(0.2) > 0$ | | $f'(0.5) < 0$ | | $f'(2) > 0$ | | $f'(5) < 0$ |

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה. $f(x) = (\ln x)^2 \cdot e^{-(\ln x)^2}$

# פתרון

$x = \frac{1}{e}$ $f\left(\frac{1}{e}\right) = (-1)^2 \cdot e^{-(-1)^2} = \frac{1}{e}$ מקסימום $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

$x = 1$ $f(1) = 0$ מינימום $(1, 0)$

$x = e$ $f(e) = (1)^2 \cdot e^{-(1)^2} = \frac{1}{e}$ מקסימום $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. $f(x) = (\ln x)^2 \cdot e^{-(\ln x)^2}$

# פתרון

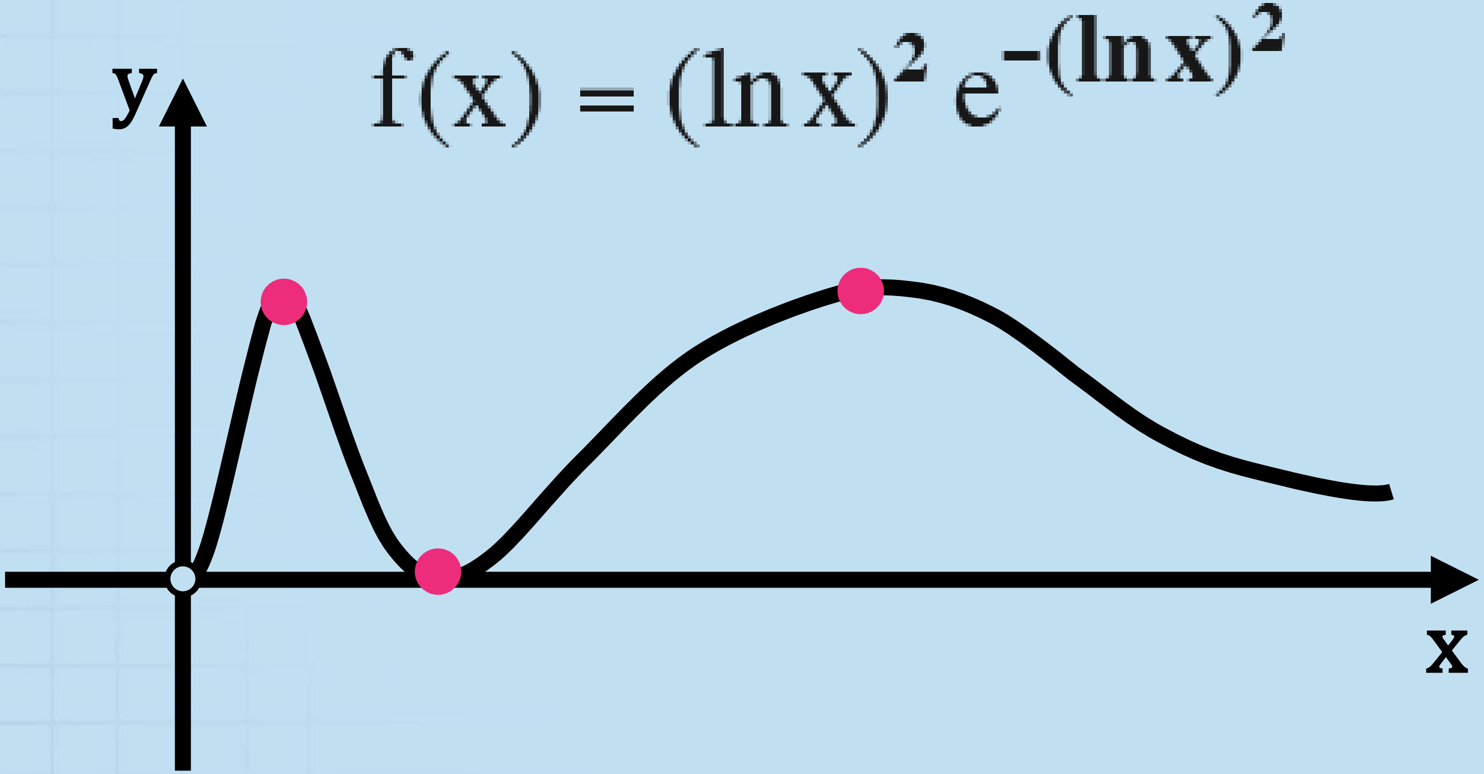
עפ"י תחומי חיוביות ושליליות של הנגזרת, בשילוב עם תחום ההגדרה של הפונקציה:

הפונקציה $f(x)$ **עולה** בתחום $1 < x < e$ או $0 < x < \frac{1}{e}$

הפונקציה $f(x)$ **יורדת** בתחום $e < x$ או $\frac{1}{e} < x < 1$

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה. $f(x) = (\ln x)^2 \cdot e^{-(\ln x)^2}$

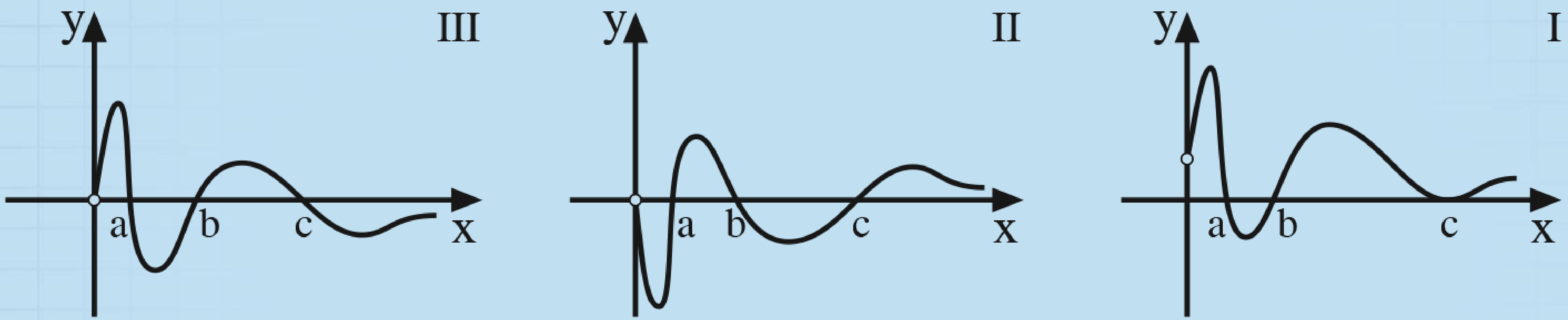
# פתרון



ו. לפניך שלושה גרפים: I, II, III.

(1) קבע איזה גרף מתאר את הפונקציה הנגזרת $f'(x)$. נמק.

# פתרון



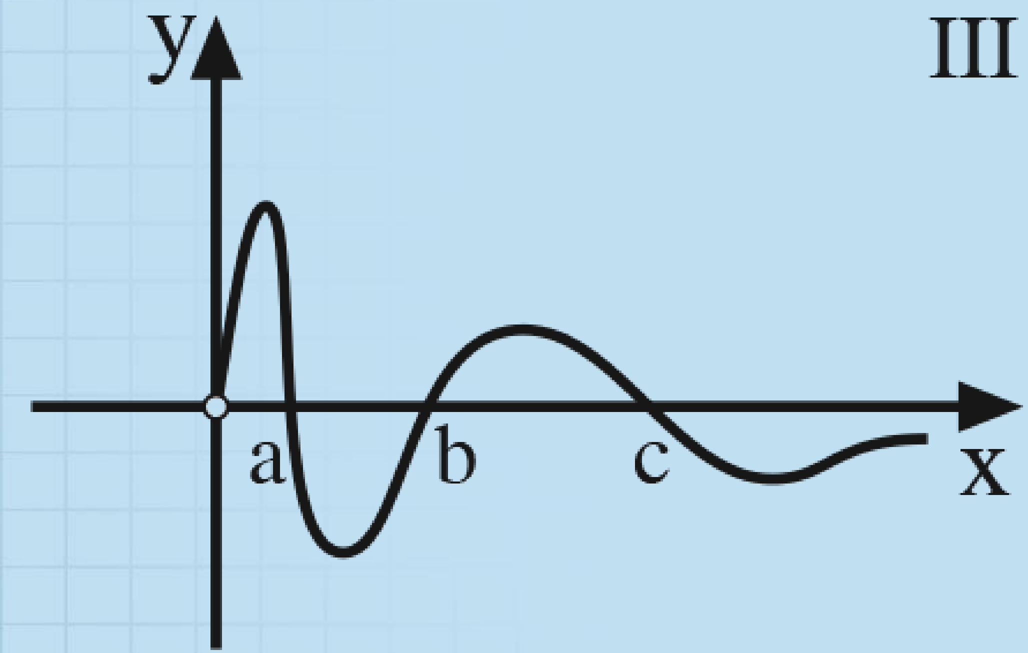

לפונקציה 3 נקודות קיצון ולכן גרף הנגזרת יחתוך את ציר ה-$x$ (ממש) 3 פעמים ולכן גרף (1) נפסל

עפ"י תחומי חיוביות ושליליות של הנגזרת ולכן גרף (2) נפסל

ו. לפניך שלושה גרפים: I, II, III.

(1) קבע איזה גרף מתאר את הפונקציה הנגזרת $f'(x)$. נמק.

# פתרון

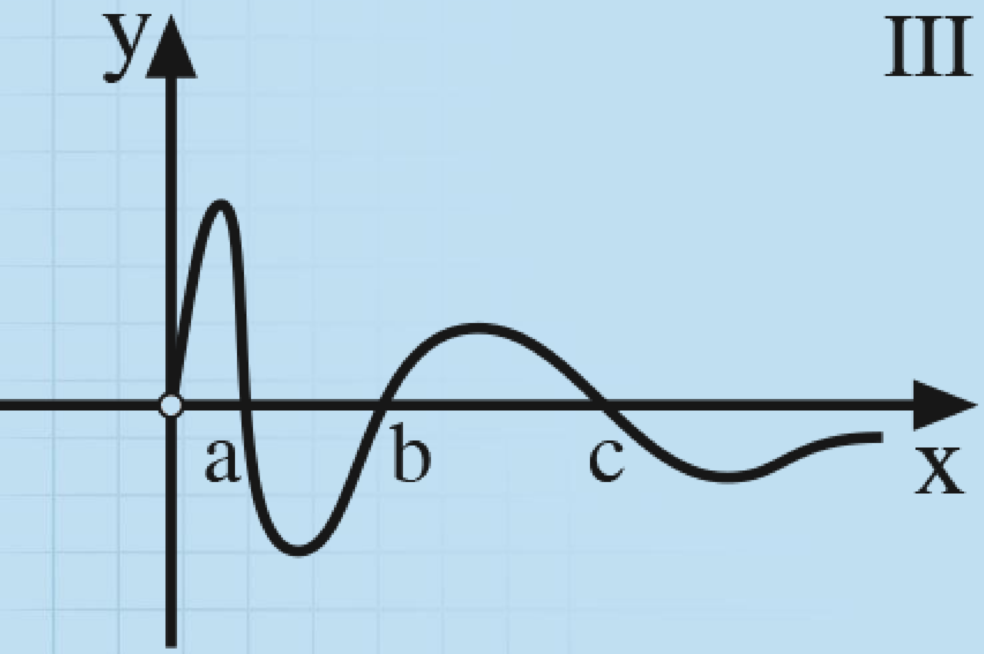



גרף הנגזרת $f'(x)$ מתואר ע"י גרף $(3)$

(2) מצא את a, b ו-c בגרף המתאים לנגזרת f'(x).

# פתרון

אלו שיעורי ה-$x$ של נקודות הקיצון של הפונקציה




$$a = \frac{1}{e}$$

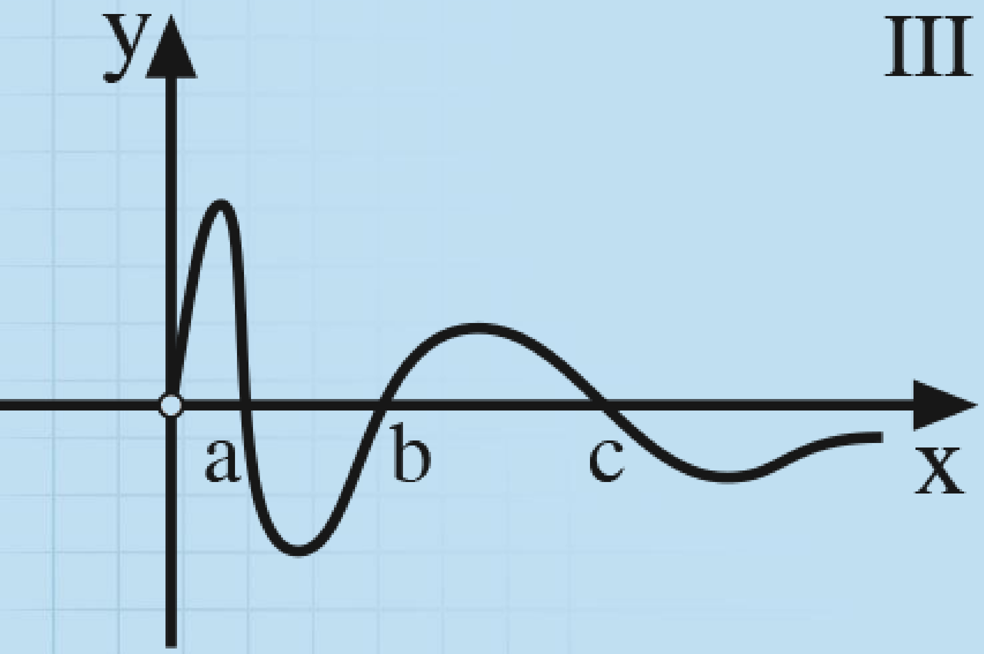
$$b = 1$$

$$c = e$$

(3) היעזר בגרף המתאים לנגזרת $f'(x)$ וקבע כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

# פתרון

כשלנגזרת הראשונה נקודת קיצון פנימית אז לפונקציה נקודת פיתול




**לפונקציה $f(x)$ ארבע נקודות פיתול**

בהצלחה