פתרון תרגיל

גדילה ודעיכה – חשבון דיפרנציאלי

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 270, ת. 4

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

4) בשנה מסויימת היו במדינה I פי 10 תושבים מאשר במדינה II. מספר התושבים במדינה I גדל כל שנה פי q ומספר התושבים במדינה II גדל כל שנה פי q^2 $(q > 1)$.

א. הבע באמצעות q את מספר השנים שעברו, החל מהשנה המסויימת הנ"ל, עד שההפרש בין מספר התושבים במדינה I לבין מספר התושבים במדינה II היה הגדול ביותר.

ב. נתון שבשנה המסויימת הנ"ל היו במדינה II k תושבים. הבע באמצעות k, עבור הזמן שמצאת בסעיף א', את ההפרש הגדול ביותר בין מספר התושבים במדינה I לבין מספר התושבים במדינה II.

ג. נסמן ב-$f(x)$ ו-$g(x)$ את הפונקציות שמייצגות בהתאמה את מספר התושבים במדינה I ובמדינה II כאשר x הוא הזמן החל מהשנה המסויימת הנ"ל. שרטט על מערכת צירים את הגרפים של $f(x)$ ו-$g(x)$. סמן בציור את הקטע שמייצג את מספר התושבים שמצאת בסעיף ב'.

בשנה מסויימת היו במדינה I פי 10 תושבים מאשר במדינה II. מספר התושבים במדינה I גדל כל שנה פי q ומספר התושבים במדינה II גדל כל שנה פי q^2 $(q > 1)$.

פתרון

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

מדינה 1

$$M_0 = 10k$$

קצב הגידול : q

$$M(x)_1 = 10k \cdot q^x$$

מדינה 2

$$M_0 = k$$

קצב הגידול : q^2

$$M(x)_2 = k \cdot q^{2x}$$

א. הבע באמצעות q את מספר השנים שעברו, החל מהשנה המסויימת הנ"ל, עד שההפרש בין מספר התושבים במדינה I לבין מספר התושבים במדינה II היה הגדול ביותר.

פתרון

נגדיר פונקציה $f(x)$ שתתאר את ההפרש בין התושבים בשתי המדינות, כתלות במספר השנים שעוברות

$$f(x) = M(x)_1 - M(x)_2 = 10k \cdot q^x - k \cdot q^{2x}$$

נמצא לפונקציה נקודת מקסימום

א. הבע באמצעות q את מספר השנים שעברו, החל מהשנה המסויימת הנ״ל, עד שההפרש בין מספר התושבים במדינה I לבין מספר התושבים במדינה II היה הגדול ביותר.

פתרון

$$f(x) = 10k \cdot q^x - k \cdot q^{2x}$$

נדרוש: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 10k \cdot q^x \cdot \ln q - k \cdot q^{2x} \cdot \ln q \cdot 2 = 2kq^x \ln q\,(5 - q^x) = 0$$

$q^x = 5$ $\qquad$ $q^x = 0$

ביטוי מעריכי חיובי לכל x

א. הבע באמצעות q את מספר השנים שעברו, החל מהשנה המסויימת הנ"ל, עד שההפרש בין מספר התושבים במדינה I לבין מספר התושבים במדינה II היה הגדול ביותר.

פתרון

$$q^x = 5$$

$$\boldsymbol{x = \log_q 5}$$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות הנגזרת השנייה

עבור $x = log_q 5$ לפונקציה נקודת מקסימום

ב. נתון שבשנה המסויימת הנ"ל היו במדינה II k תושבים. הבע באמצעות k, עבור הזמן שמצאת בסעיף א', את ההפרש הגדול ביותר בין מספר התושבים במדינה I לבין מספר התושבים במדינה II.

פתרון

נמצא את שיעור ה- y של נקודת המקסימום

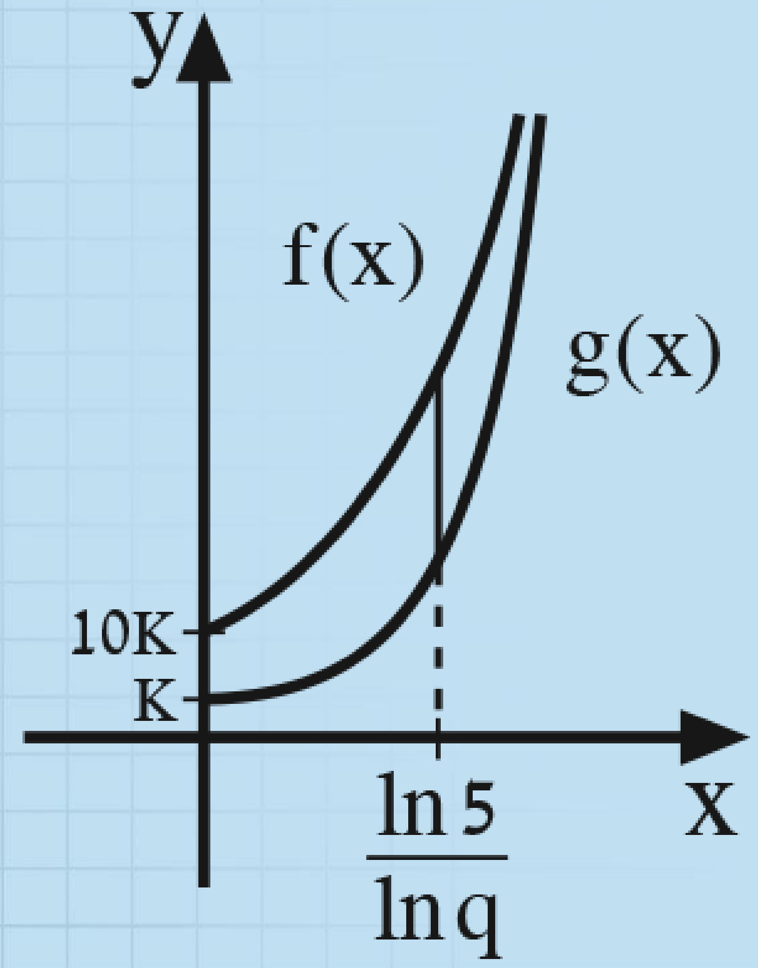
$$f(x) = 10k \cdot q^x - k \cdot q^{2x}$$

$$f(\log_q 5) = 10k \cdot q^{\log_q 5} - k \cdot q^{2\log_q 5} = 10k \cdot 5 - k \cdot 5^2$$

$$\boldsymbol{f(log_q 5) = 25k}$$

ג. נסמן ב-$f(x)$ ו-$g(x)$ את הפונקציות שמייצגות בהתאמה את מספר התושבים במדינה I ובמדינה II כאשר x הוא הזמן החל מהשנה המסויימת הנ״ל. שרטט על מערכת צירים את הגרפים של $f(x)$ ו-$g(x)$.
סמן בציור את הקטע שמייצג את מספר התושבים שמצאת בסעיף ב׳.

פתרון



ג.

$$f(x)=M(x)_1=10k\cdot q^x$$

$$g(x)=M(x)_2=k\cdot q^{2x}$$

בהצלחה